理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

2004 年 1 月 25 日

最終回

というわけで、この講義も最終回である。今日は自己重力多体系におけるカオスについていくつかの話題を扱ってみよう。

1　カオス

そもそもカオスとは何でなぜそういうものを考えるかというところから話を始める必要がある。

というわけで、定義から始めたいところだが、一応ここでは

- 系は決定論的な方程式系 (典型的には連立常微分方程式系) で記述される
- 単純な周期的 (あるいは多重周期的) な解を持つわけではない

ものをカオスということにする。

そういうものはいくらでもあるわけだが、まず、カオスで「ない」ものの例から考えていこう。

球対称ポテンシャルの中での粒子の運動はカオスではない。これは、軌道が単純な動径方向の振動と角度方向の振動に分離できるからである。

これが、軸対称ポテンシャルになるともういきなり話がわからなくなる。軸対称なので円筒座標 (R, z) を考えると、ポテンシャル $U_g(R, z)$ の中で z 軸回りの角運動量 L_z を持つ粒子の運動は、有効ポテンシャル

$$U(R, z) = U_g(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2} \tag{1}$$

の中での平面運動と同じである。従って、一般論として、軸対称ポテンシャルの中での運動を考えるには、単なる 2 次元平面 (x, y) の中での運動を考えればよい。言い換えると、軸対称ポテンシャルの中での粒子の運動というのは、極めて一般的な、2 次元平面の中での運動と等価である。

Hénon と Heiles (1964 AJ 69, 73) は、 U として以下のようなものを考えてみた。

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \tag{2}$$

何故この形を考えたかというのは、論文には以下のように書いてある

> because: (1) it is analytically simple; this makes the computation of the trajectory easy; (2) at the same time, it is sufficiently complicated to give trajectories which are far from trivial, as will be seen below.

つまり、物理的あるいは天文学的になにかの意味があるというよりは、このポテンシャルの中での軌道の振る舞いが妙であるということで選ばれたかなり人工的な例ではある。

もちろん、最初の項は調和振動であり明確な意味がある。非線型の第 2 項の意味はポテンシャルの等高線を書いて見ると分かる。

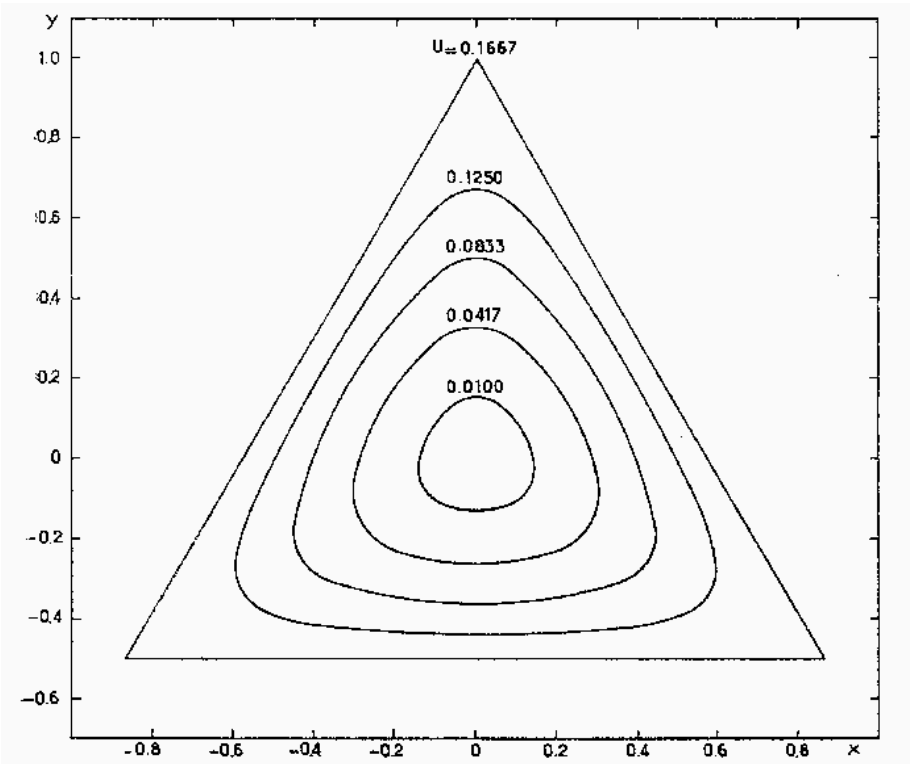


FIG. 2. Equipotential lines of (11).

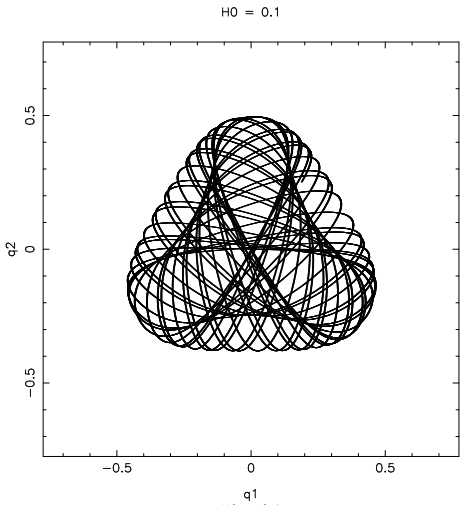
このように、非線型項によりポテンシャルが三角形になっている。特に $U = 1/6$ の等高線に注意すると、これは直線になっている。このことから、この三角形の頂点はポテンシャルの鞍点であり、力が 0 になることが分かる。

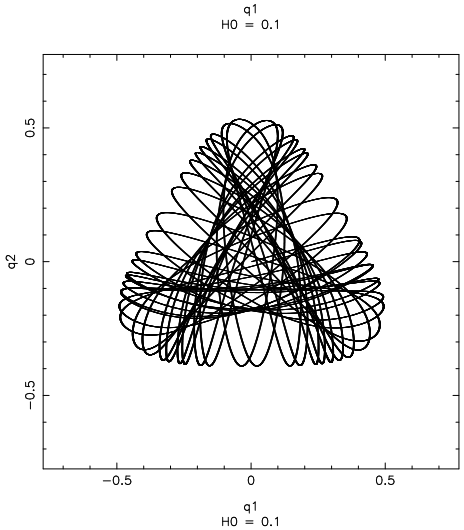
鞍点であるので、ポテンシャルが下がるのは三角形の内側を向いた方向とその反対側の方向だけであり、それに直交する方向ではポテンシャルは増えている。また、頂点以外では力は 0 でない。

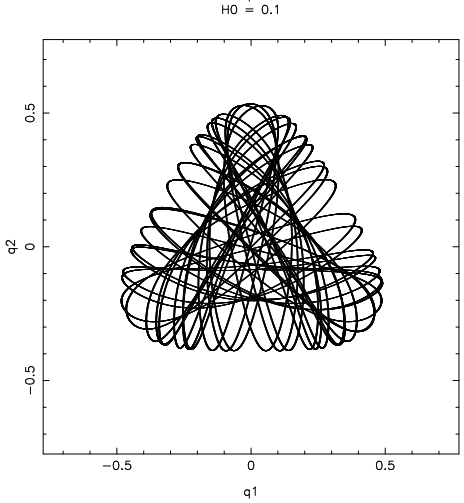
軌道は例えばこんなふうである。これはエネルギー (ハミルトニアン)

$$H = \frac{v^2}{2} + U(x, y) \tag{3}$$

の値を $H = 0.1$ とし、3 つの違う初期条件から数値的に軌道を計算した結果である。







これだけを見ていると別にどうということはないが、ここでいわゆるポアンカレ断面というものを書いて見ると非常に面白いことになっていると分かる。ポアンカレ断面とは、 この場合のような自由度が 2 のハミルトン力学系で、一方の変数、例えば x が 0 になる時に y, v_y の値を書いたものである。

まず、 $H = 1/12$ の場合を示す。

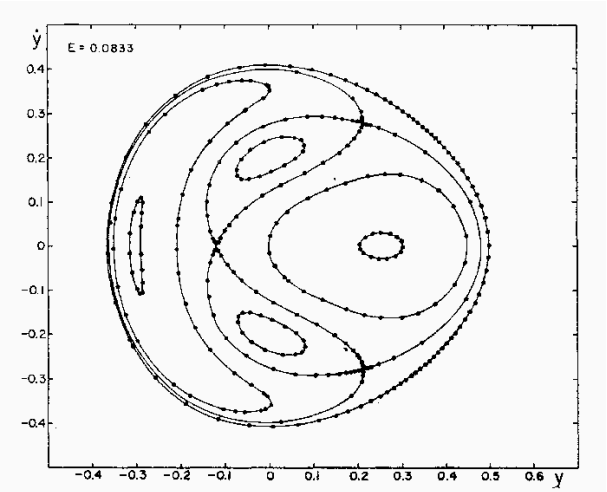


FIG. 4. Results for $E = 0.08333$.

ここで、つながって線になっているのは基本的には一つの軌道であり、分かれた曲線は別の初期条件からの軌道に対応している。エネルギー保存を考えると、$x = 0$ で $v_x^2 \geq 0$ なので、 (y, v_y) はある閉領域の中にくる。保存量がエネルギーだけであれば、任意の初期条件から出発した軌道はこの領域の全ての点をいつかは通ると考えられるが、 このようにそうならないということは、なんだかわからない保存量のようなものがあるということを示している。元々の軸対称ポテンシャルに戻ると軸回り角運動量は保存しているが、これは有効ポテンシャルにして回転方向の速度を消去するのに使っているので、2 次元問題になった後では無関係である。

軸対称ポテンシャル内での運動にエネルギーと角運動量以外の保存量があるかどうかという問題は、「第 3 積分問題」と呼ばれる恒星系力学上の現在でも完全には解決されているとはいいがたい問題の一つである。 とりあえずこの場合には、第 3 積分が存在しているように見える。

但し、妙なのは、ポアンカレ断面上の軌跡が交点をもつように見えることである。実際には、この「交点」のところを精密に調べると、奇妙なことがわかる。交点近くの十分に狭い領域では運動の積分が無くなって、ある領域内を軌道が埋めているのである。

この領域はエネルギーを大きくするとどんどん大きくなる。次は $E = 1/8$ の場合である。

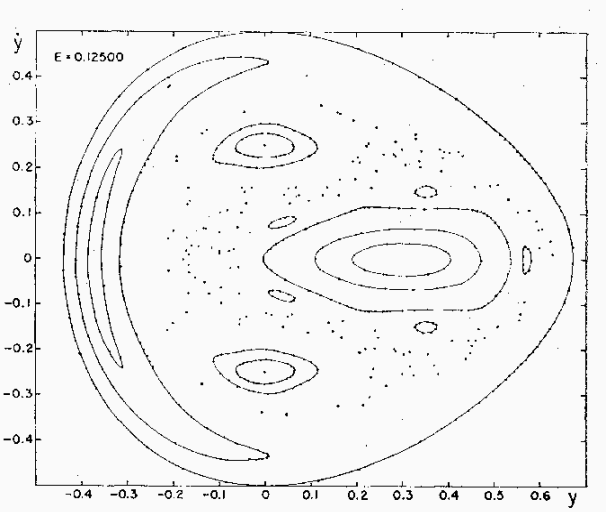


FIG. 5. Results for $E = 0.12500$.

保存量を持つ、規則的な運動をする領域よりも、規則的ではない運動をする領域のほうが広くなってしまっていることが分かる。少なくとも恒星系力学では、このような場合に 規則的な軌道を regular orbit, そうでないものを irregular orbit または chaotic orbit という。

さらにエネルギーの上限に近い $-1/6$ をとったものが下である。

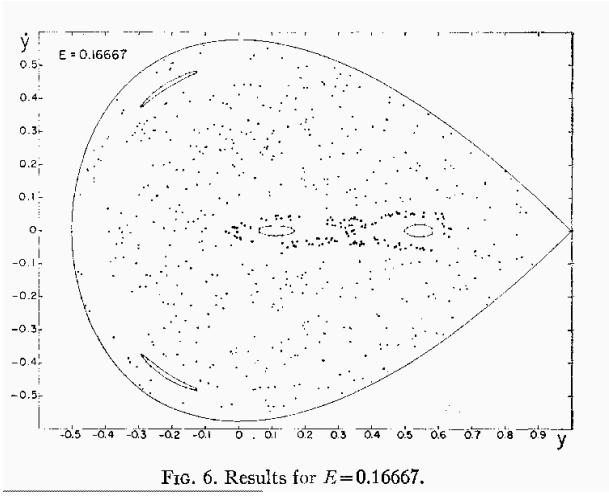


FIG. 6. Results for $E = 0.16667$.

キャプションには $1/6$ よりも大きいようなことが書いてあるが、気の迷いであろう。それはともかく、この場合にはほとんどの領域が規則的でない、つまり、第 3 積分をもたないような軌道になっていることが分かる。

これはカオス的な運動の典型的な例である。

ここではカオスかどうかを、エネルギー以外の積分がある (ように見える) かどうかで判断したが、実質的に同じことになるもうひとつの定義がある。それは、「十分に近い初期条件から出発した 2 つの軌道がどのように離れていくか」である。より厳密にはこれはリヤプノフ指数が正かどうかということになる。定義の詳細はここでは省くが、大雑把にはリヤプノフ指数が正なら十分近い 2 つの軌道が指数関数的に離れていく。このことは上の Hńon-Heiles 系でも観察され、周期的に見える領域では軌道は時間の 1 次で離れていくが、カオス的な領域では指数関数的に離れる。

2　無衝突系におけるカオスの役割

この講義ではほとんど球対称な系しか扱わなかった。球対称の場合には軌道は必ず regular なので、カオスのでる幕はないが、軸対称になると既に原理的には良くわからないことが起きてくる。 さらに、3 軸不等な一般的なポテンシャルになると、多くの場合に chaotic orbit があることがわかっている。

あるポテンシャルでカオス的な軌道があるとすると、原理的には、では実際にそういう軌道が現実の銀河等で存在できるかということが問題になる。現在までのところ、例えば 3 軸不等な銀河モデルを構成しようという試みのほとんど全ては regular orbit の組合せでポテンシャルを再現しようとするものである。これは M. Schwarzschild (有名な K. Schwarzschild の息子。 Stellar evolution の理論的研究で有名) が 1980 年代になって発展させた方法である。

ところが、前回考えたような、系の中心にブラックホールがあるようなものを持ってくると、あるタイプの軌道 (box orbit と呼ばれるもの) regular では無くなるということが知られている。これは、3 軸不等な系や、軸対称でも回転している系、あるいはバーを持つ系では、カオス的な性質によって恒星がブラックホールの近くに来ることができるかもしれないということを意味しており、ブラックホールの進化、成長についてなんらかの意味を持っているかもしれない。 が、これはここ数年になってある程度理解が進んできた領域であり、まだ解明されていない問題のほうが多い。

3　衝突系におけるカオスの役割

衝突系では、カオスは球対称モデルであってもいたるところに現れる。

古典的な 3 体問題が、前にみたように「初期条件が非常に近い軌道が非常に速く離れる」という意味でも、また運動の積分がないように見えるという意味でもカオスになっている。 もうちょっと一般的にいってた、一つ一つの粒子の軌道を見る、あるいは $6N$ 次元の Γ 空間での系の軌道を見ると、それは必ずカオス的であるということがわかっている。

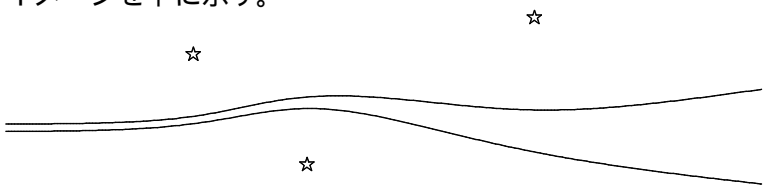
一見、このことは無衝突系は (例えば球対称なら) カオス的ではないとさっき断言したことと矛盾するように見えるので、まずカオス的であるということの意味を考えておこう。

各粒子の軌道そのものは、リヤプノフ指数が正で、その時間スケールが自由落下時間 $t_{\rm ff}$ の数分の一程度であるという意味でかなり強くカオス的であるか。これは、大雑把にいえば有効数字が $t_{\rm ff}$ あたり 1 桁程度減っていくということであり、従って $10\ t_{\rm ff}$ もたてば初期条件の精度が 64 ビット浮動小数点数の有効数字だけあったとしても、最終状態での個々の粒子の位置の精度は 10 桁落ちて 5-6 桁しか残っていない。つまり、2 つ全く同一な系で、1 つの粒子だけ初期条件の最後の 1 ビットだけ変えて計算を始めたとして、$10\ t_{\rm ff}$ 程度でそのずれが 10^{10} 倍にも増幅されるわけである。

これは、力学系自体の性質なので、例えば数値計算の精度の問題ではない。どれほど数値積分を正確に行なっても同じことである。球状星団や散開星団の進化の計算では、数千から数万クロッシングタイム程度の長さのシミュレーションを行なうが、その後で各粒子の位置が意味を持つためには計算精度が数万桁いるわけである。そんなことはできるはずがないので、多体シミュレーションでは必ず個々の粒子の位置は「正しく」ない。

このように指数関数的な成長が起きるのは、難しげにいうと Γ 空間 ($6N$ 次元位相空間) での軌道

が双曲的であるからということになるが、もちろんこれは指数関数的に広がるというのの言い替えでしかない。具体的にミクロスコピックにみてどうやって広がるかというのを見てみると、これは結局他の粒子と近接遭遇した時に軌道間の距離が拡大される傾向があるからである。2 次元の時のイメージを下に示す。



ここで、細かい人は 3 次元だと紙に垂直な方向では軌道が縮んでいるのではないかと思うかもしれない。軌道のずれの 1 次 (線形) の分だけをとって計算するとそうなるが、ここでは実は 2 次の項の分が効き、そちらは拡大する方向に働くのである。

3.1 指数的成長と熱力学的緩和

このように初期条件の差が指数関数的に成長する時間スケール (大雑把にいって最大リアプノフ指数の逆数程度) と、系が熱力学的に緩和する時間スケールとの間にはなんの関係もないことに注意して欲しい。実際、熱力学的に緩和する時間スケールはほぼ粒子数に比例するのに対し、指数関数的成長の時間スケールは粒子数に無関係に一定なのである。さらに、指数関数的成長を担うのは、上に述べたように比較的近接した粒子同士の相互作用である。具体的には、距離が $R/\sqrt{N}$ の程度のものの寄与が最大であるというのが少し計算するとわかる。この程度の距離まで粒子同士が近付くのはクロッシングタイムに 1 度程度であり、これは粒子数 N に無関係である。これに対し熱力学的緩和を担うのは R/N から R までの全ての粒子との相互作用であり、従って近距離でのポテンシャルの形をすこし鈍らせることで、熱力学的緩和の時間スケールをあまり変えないで指数関数的成長の時間スケールのほうは非常に長くすることができる。

ここでよろしくないのは、熱力学的緩和とは「系が初期条件を忘れること」であり、また、初期条件の微小なずれが指数関数的に成長することがまさにその「忘れる」ことであるとなんとなく思ってしまうことである。

少し思考実験をしてみよう。今、非常に粒子数が大きい系を考え、そのなかで、ある位相空間の微小体積を考える。熱力学的緩和によって初期条件を忘れるとは、基本的にはその中にある粒子が系分布関数全体 (というか、まあ、とにかくある程度の広さ) に広がるということであろう。それらが依然としてどこかに固まっていれば、緩和したとはいい難い。では、指数関数的な成長でこの微小体積をどのように変形できるのであろうか？配位空間での大きさが、上の $R/\sqrt{N}$ よりも小さいうちは、空間の少なくとも 1 方向に向かってはほぼ指数関数的に伸びていく。これは、他の粒子との散乱が基本的にはコヒーレントであるからである。つまり、微小体積の大きさに比べて散乱のインパクトパラメータが大きく、微小体積のなかの各粒子の軌道は基本的には同じように曲がる。同じように曲がるので、その差を考えると散乱するほうの粒子に近いほうが大きく、遠いほうは小さく曲がり、差が指数関数的に成長できるのである。

逆に、どんどん延びていってある 1 方向に対して長さが $R/\sqrt{N}$ を超えると、散乱のインパクトパラメータに比べて微小体積のほうが大きいような散乱が頻繁に起きることになる。このような散乱では、上の場合のように線形に微小体積が引き延ばされるというような簡単な話にはならない。む

しろ、長さが $R/\sqrt{N}$ よりも十分大きい極限では、各粒子がどのような散乱を受けるかというのは他の粒子とはほとんど無関係になる。もちろん、非常にインパクトパラメータの大きな散乱に対しては依然としてコヒーレントなわけだが、それによる指数関数的成長の時間尺度はインパクトパラメータが大きくなるにつれて急速に長くなる。こうなると、各粒子間の距離は指数関数的には広がり得ない。散乱が無相関である極限では粒子間の距離は拡散的に広がることになる。

そういうわけで、指数関数的に軌道が広がるといっても、それはせいぜい $R/\sqrt{N}$ 程度の距離までである。そこから先は拡散的なので、平均的には $\sqrt{t}$ に比例して距離が広がっていくということになる。

このため、粒子数が無限に大きい極限を考えると、軌道間の距離が指数関数的に成長できる領域が無限に狭くなるので、極限では軌道は regular と思ってよいことになるわけである。

もっとも、これは依然として「粒子の位置がどこかわからなくなる」ということを意味することに変わりはない。拡散的になってしまうというのは、要するに本当にランダムになってしまうということである。もちろん、原理的には決定論的なハミルトン系なのでランダム性なんてものはどこにもないが、しかし、非常に近くにある 2 粒子の距離が、まずは指数関数的に、それからはランダム・ウォーク的に広がるわけである。繰り返しになるが、これは物理的な系のもともと持っている性質であり、数値計算で有限の精度でやるからそうなるとかいう問題ではない。

このことは、衝突系の N 体数値計算には厳密な理論的裏付けがあるわけではないということを原理的には意味しているとも考えられる。「統計的な性質」、例えば熱力学的な進化は「正しく」表現していると一般的には信じられているが、厳密に数学的にそうかというと難しい問題なわけである。

4 レポート課題

以下のどれでも OK。

M2, D3, 他学部、他学科の人は成績報告の都合があるそうなので〆切は 2/9 とします。それ以外は (一応)2/28。但し、事務の都合で変わるかもしれないので Web のほうを参照してください。

1. NFW プロファイル、 Hernquist モデルまたは一般化された Dehnen model について、以下の問いに答えよ。

   (a) potential-density ペアの形を書け。

   (b) 速度分布は等方的であるとして、分布関数 f をエネルギーの関数として書け。

   (c) 適当な単位系 (Hernquist, Dehnen では Heggie Unit, $G = M = R_v = 1$, $E = -1/4$, NFW は「適当」) の下で、速度分散を半径の関数として求めてグラフを書け。

   (d) それぞれのモデルが、銀河団、銀河、矮小銀河を表していると思った時に、(サイズ、質量をそれらしくとった時に)、局所的な緩和時間と宇宙年齢 (14 Gyr とする) の比を半径の関数として書いてみよ。但し、系を表現するのに使った粒子数は 100 万とし、2 粒子ポテンシャルは厳密な $1/r$ ポテンシャルとする。

   (e) 上の結果から、宇宙論的構造形成シミュレーションの結果の信頼性について議論せよ。

2. 銀河団ガスの分布について、以下の問いに答えよ。

   (a) ダークマターの分布が正しい等温分布であるとして、X 線ガスの表面輝度がどうなるかを求めよ。β のいくつかの値についてやってみること。

   (b) 上で求めたガスの表面輝度を Jones & Forman (ApJ 1984, 276, 38) での Einstein の観測結果と比べて、大雑把 (目でみて) でよいから β の値を求め、Jones & Forman の値と比較せよ。

   (c) 恒星系の分布が等温ではない時の等温ガスの密度をポテンシャルの関数としてあらわせ。

   (d) Hernquist model の場合に、X 線ガスの表面輝度はどのようになるか求めよ。なお、半径無限大で発散する場合は、適当な半径で分布を打ち切ってよい。

3. これまでに紹介された論文 (どれでも OK) のなかから、どれかを読んで内容を要約し、それが正しいかどうかについて議論せよ。