

# 理論天体物理学特論 I

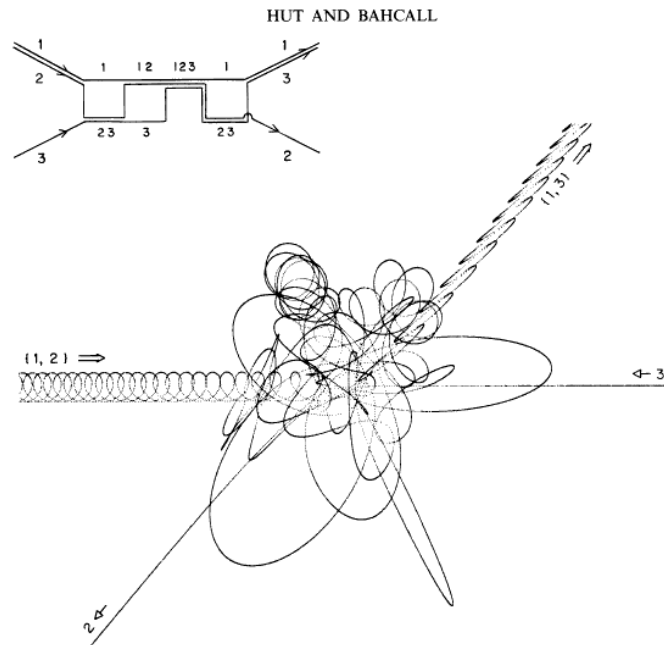
牧野淳一郎

2008 年 7 月 9 日

## 1 連星の話の続き

先週は色々破綻していたので途中から復習も兼ねて。

とりあえず 3 粒子の相互作用の 1 例を:



これは、円軌道の連星と、もうひとつの星の正面衝突の例である。複雑な相互作用の結果、星の 2 番目と 3 番目が入れ替わって、元は円軌道だったのが離心率が大きな連星になる。このようなので複雑な相互作用では、途中で 2 つの星が近接遭遇することがあるし、また、途中で 3 つのうち 1 つがかなり遠くにいってしまうこともある。

## 2 形成、相互作用の確率

### 2.1 3体遭遇による形成確率

例によって密度一様、速度分散がマックスウェル分布の恒星系で連星ができる確率、というものを考えてみる。係数の細かいことは別にしてスケールリングだけを考える。

これは、「2つの粒子が十分近くで相互作用している間にその近くにもうひとつがくる確率」と考えられる。

質量  $m$  速度分散  $v$  数密度  $n$  とする。1つの粒子を考えると、十分近い距離というのは  $m/r = v^2$  なので  $r = m/v^2$  となり、散乱断面積は  $\sigma = m^2/v^4$  である。従って、1つの粒子がもうひとつと相互作用する確率は  $P = n\sigma v$  となる。相互作用している時間は  $T = r/v = m/v^3$  であるので、相互作用している間にもうひとつと相互作用する確率は

$$P^2T = n^2m^5v^{-9} \quad (1)$$

となる。

ここでは散乱断面積とかに本当ははいってくる係数を全部無視して「1のオーダー」としたが、Goodman and Hut (1993) によれば最終的な結果の比例係数は実際に1の程度であることが数値実験等によってわかっている。

### 2.2 2体の近接非弾性散乱による形成

恒星同士の2体の非弾性散乱によって本当に連星ができるのかどうかは本当のところはよくわかっていない。もちろん、十分に近くを通れば2つは結合状態になるし、その時に全角運動量を保存したままで円軌道の連星に進化するとすれば軌道長半径が最初の遭遇の時の近点距離よりちょっと大きいところ(計算すること)で連星になる。

しかし、実際にそううまくいくかどうかは一部の質量が角運動量をもって逃げていくとか、星の内部の振動と軌道運動の間に共鳴が起こるかもしれないとかを考慮すると変わってくる。

大質量のブラックホールと普通の星、といった場合についてもこれは同様で、連星になるケースが本当にあるのかどうかはわからない。

連星になるとすると、十分に近い距離、というのは基本的には単に星の半径の程度になる。半径  $R$  が90度散乱の距離  $R_{90} = m/v^2$  に比べて十分小さい時には散乱断面積は  $\sigma = RR_{90} = Rm/v^2$  になり、形成確率は  $nRm/v$  の程度になる。  $R > R_{90}$  なら連星にならないことに注意。

### 2.3 連星になった後の進化

単位時間当りのエネルギー変化は軌道長半径に依存しなくなる。このことをオーダー見積もり程度の計算によって示してみる。

連星が他の星と相互作用してエネルギーを変えるためには、他の星が連星の軌道長半径程度まで近づく必要がある。連星の軌道長半径を  $a$  としよう。また連星と周りの星の相対速度の典型的な値を  $v$  とする。

まず、連星の重力エネルギー  $m^2/(2a)$  は典型的な運動エネルギー  $mv^2/2$ (係数適当) よりも大きいことに注意する。これは、近接遭遇する相手が  $a$  程度の距離まで連星に近づいた時には、重力ポテンシャルによって速度が大きくなっていることを意味する。言い換えると、角運動量保存のために、無限遠方でのインパクトパラメータは  $a$  よりずっと大きくなる。この効果を gravitational focusing という。

この効果を一応式で計算してみる。連星と相手の合計の質量を  $M$  とし、無限遠でのインパクトパラメータを  $b$ 、最も近付いた時の距離を  $r_p$  とする。また、この時の速度を  $v_p$  とするエネルギー保存から

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{M}{r_p} \quad (2)$$

角運動量保存から

$$bv = v_p r_p \quad (3)$$

これから少し整理すると

$$b^2 = r_p^2 \left( 1 + \frac{2M}{r_p v^2} \right) \quad (4)$$

となる。連星の重力エネルギーが典型的な粒子の運動エネルギーより大きいことから  $M/r_p \ll v^2$  としてよいので、式 4 で右辺の最初の項は無視できて

$$b^2 \sim \frac{2Mr_p}{v^2} \quad (5)$$

となる。相互作用を考えると  $r_p \sim a$  であり、 $a$  まで近づくための散乱断面積が ( $\pi$  とかは無視して)

$$\sigma = b^2 = \frac{2Ma}{v^2} \quad (6)$$

であり、散乱断面積が  $a^2$  ではなく  $a$  に比例する。

これは、結合エネルギー  $E_b$  で考えると、散乱断面積が  $E_b^{-1}$  に比例する、ということに対応する。つまり、相互作用する典型的な時間間隔は  $E_b$  が大きくなるとそれに反比例して長くなる。相互作用 1 回当りのエネルギー変化は  $E_b$  に比例するとしてよいので、結局単位時間当りのエネルギー変化は一定となる。

## 2.4 球状星団の場合の最終状態

最終的には星団のポテンシャルからでていくか、合体で壊れる。

連星ともうひとつの星が相互作用すると、典型的には連星の結合エネルギーが 40% 程度大きくなる。その分のエネルギーは新しくできた連星の重心と、打ち出された星の相対運動のエネルギーに変換される。

この時、連星が最初に十分ハードであれば、相互作用前にもっていた連星の重心と相互作用の相手の運動エネルギーは相対的に小さくて、相互作用の後にもつエネルギーはエネルギー変化の分程度になる。星が全て等質量だとすると、連星の重心の速度は打ち出される星の半分となる。単位質量当りでは打ち出される星は連星の重心の 4 倍のエネルギーになる。

このような連星と単独星の相互作用が球状星団コアで起こると、初期の連星の結合エネルギーが大きいとまず打ち出された星が、最終的には連星自体も星団から打ち出されることになる。コアのポテンシャルの深さは  $kT$  単位で 10 から 20 程度なので、連星は大体  $100kT$  程度の結合エネルギーになると星団に留まることができなくなる。

## 2.5 等質量でない場合

連星が等質量なら、resonant interaction の結果どれが打ち出されるかは基本的に等確率となる。

しかし、多少でも質量差があるところは全く変わってくる。3 体の resonant interaction の間にも、統計的には等分配になろうとするので、もっとも軽いものが圧倒的に高い確率で打ち出されるからである。質量比が 2 倍程度もあれば殆ど確実に最も軽いものがでていくことになる。

このため、連星と他の星の相互作用が無視できないような系では、連星になるのは選択的にもっとも重い粒子になる。星団の場合には、そのようなもっとも重い星同士の連星が力学的摩擦のために速度を失って系の中心近くに居座ることになる。

## 2.6 星団へのエネルギー供給

ある程度ハードになると自分も相手も相互作用した後に星団コアから打ち出されるので、直接加熱になるかどうかは自明ではない。通常の理論モデルでは indirect heating といって、質量が失われる効果だけを考えればよい。

そうすると、結局、形成された連星が瞬間的にハードになってでていく、というのが主な加熱機構になる。この時に、連星による星団コアの加熱率を大雑把に求めてみよう。コアの質量が 1 で半径が 1 になるような単位系を使う。このため、速度は 1 の程度になる。また、粒子数を  $N$  とすると、式 1 から、単位時間にある星が連星になる確率は  $m^3 = N^{-3}$  になる。従って、単位質量当りの加熱率も  $N^{-3}$  である。実際には、連星が与えるエネルギーはもうちょっと大きいので、 $100N^{-3}$  程度になる。

さて、これを重力熱力学的崩壊の自己相似的収縮をしているコアから単位時間に流れ出すエネルギーと比べると、これは緩和時間当り  $1/300$  程度であることが知られている。この 2 つが釣り合う辺りは

$$100N^{-3} = \frac{1}{300} \frac{26 \log N}{N}$$

となり、 $N \sim 30$  になる。つまり、大雑把にいて  $N = 30$  くらいのところで連星による加熱が自己相似的収縮を止める。

## 2.7 離心率の進化

現在のところ、星団内の連星の離心率の進化については殆どなにもわかっていない。重力波による中性子連星の合体確率等を考えるには極めて重要であるが、今後の研究課題である。

わかっていない理由は信頼できる数値計算をする方法がまだ存在しないことである。詳しくは次回くらいに。

## 2.8 古在機構

これは、元々小惑星等について、軌道傾斜角の大きなものが木星の影響下でどのような振る舞いをするか、ということ調べた結果でてきたものである。起こることは、軌道傾斜角と離心率がカププルして、非常に振幅の大きな振動をすることがある、というものである。

これが起こる理由は、基本的には太陽と木星が作るポテンシャルを考えて、その時間平均をとったものを考える(永年摂動を考える)と、木星が円運動と近似すればポテンシャルは軸対称になり、全角運動量は保存しなくなる、というものである。元のポテンシャルがケプラーに十分近いので  $z$  軸周りの角運動量以外にも保存量が残る。

連星についても、例えば回りにもうひとつ星があるとか、あるいは親星団のポテンシャルがあるとかで内部運動のポテンシャルが球対称からずれることは一般に起こる。そうすると、エネルギーは保存しても角運動量は保存しなくなる。

このような、時間定常な外場によって角運動量が保存しなくなる効果を一般に古在機構と呼ぶこともある。

この効果は、摂動が小さくても変化の振幅が小さくならない(変化の速度は遅くなるが)という著しい特徴があり、連星系の進化に対して極めて重要な役割を色々なところで果たす。

木星の軌道が円軌道でないと、摂動ポテンシャルは軸対称でもなくなる。そうすると、2体問題でも摂動の結果軌道がカオスになる、といったことが起こる。というわけで、次に少しだけカオスの話をする。

## 3 カオス

そもそもカオスとは何でなぜそういうものかを考えるかというところから話を始める必要がある。

というわけで、定義から始めたいところだが、一応ここでは

- 系は決定論的な方程式系(典型的には連立常微分方程式系)で記述される
- 単純な周期的(あるいは多重周期的)な解を持つわけではない

ものをカオスということにする。

そういうものはいくらでもあるわけだが、まず、カオスで「ない」ものの例から考えていこう。

球対称ポテンシャルの中での粒子の運動はカオスではない。これは、軌道が単純な動径方向の振動と角度方向の振動に分離できるからである。

これが、軸対称ポテンシャルになるともういきなり話がわからなくなる。軸対称なので円筒座標  $(R, z)$  を考えると、ポテンシャル  $U_g(R, z)$  の中で  $z$  軸回りの角運動量  $L_z$  を持つ粒子の運動は、有効ポテンシャル

$$U(R, z) = U_g(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (7)$$

の中での平面運動と同じである。従って、一般論として、軸対称ポテンシャルの中での運動を考えるには、単なる 2 次元平面  $(x, y)$  の中の運動を考えればよい。言い換えると、軸対称ポテンシャルの中での粒子の運動というのは、極めて一般的な、2 次元平面の中での運動と等価である。

Hénon と Heiles (1964 AJ 69, 73) は、 $U$  として以下のようなものを考えてみた。

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (8)$$

何故この形を考えたかというのは、論文には以下のように書いてある

because: (1) it is analytically simple; this makes the computation of the trajectory easy; (2) at the same time, it is sufficiently complicated to give trajectories which are far from trivial, as will be seen below.

つまり、物理的あるいは天文学的になにかの意味があるというよりは、このポテンシャルの中での軌道の振る舞いが妙であるということで選ばれたかなり人工的な例ではある。

もちろん、最初の項は調和振動であり明確な意味がある。非線型の第 2 項の意味はポテンシャルの等高線を書いて見ると分かる。

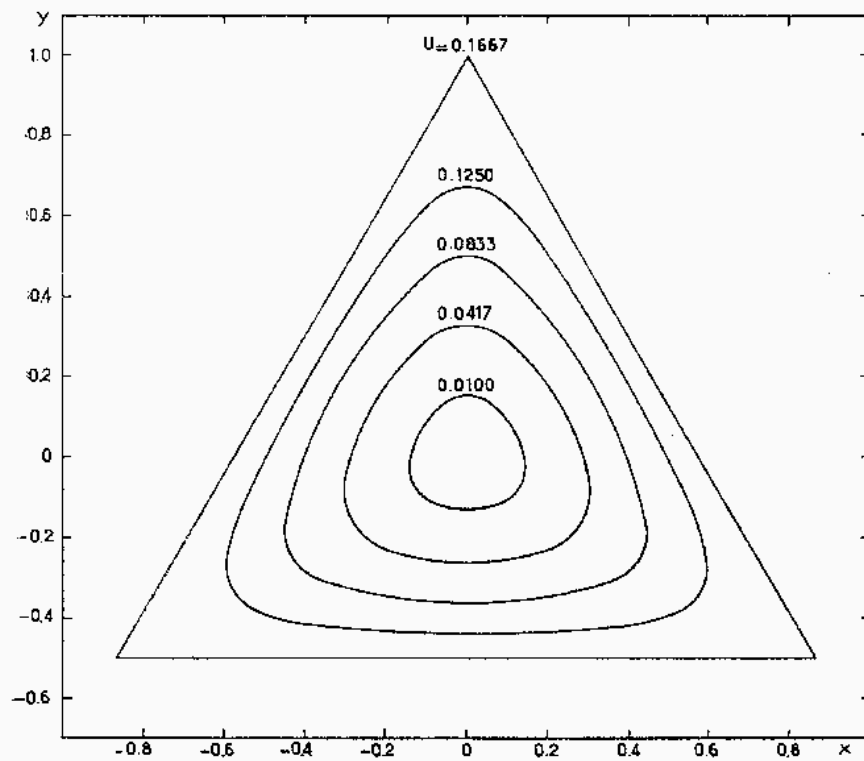


FIG. 2. Equipotential lines of (11).

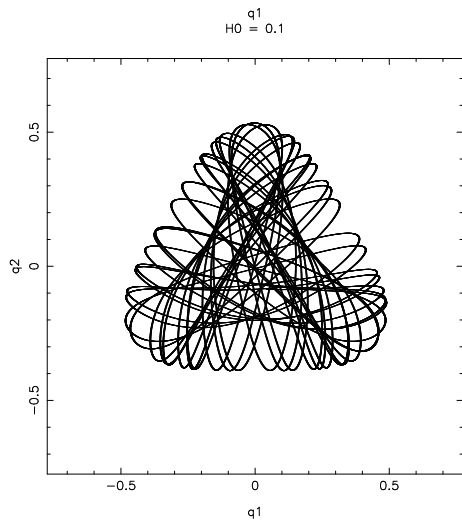
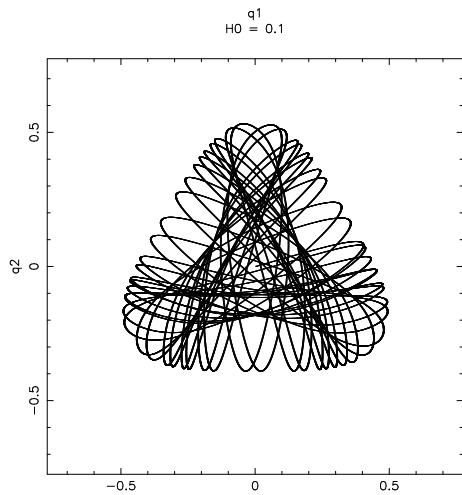
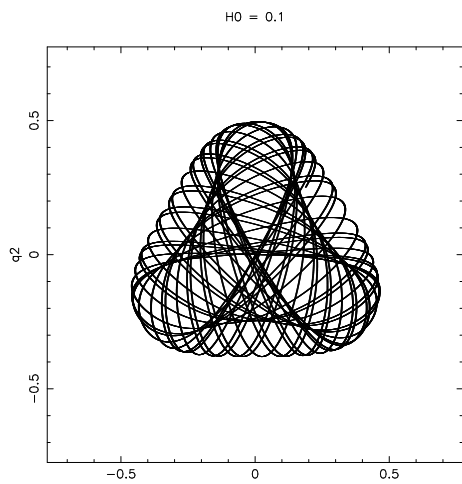
このように、非線型項によりポテンシャルが三角形になっている。特に  $U = 1/6$  の等高線に注意すると、これは直線になっている。このことから、この三角形の頂点はポテンシャルの鞍点であり、力が 0 になることが分かる。

鞍点であるので、ポテンシャルが下がるのは三角形の内側を向いた方向とその反対側の方向だけであり、それに直交する方向ではポテンシャルは増えている。また、頂点以外では力は 0 でない。

軌道は例えばこんなふうである。これはエネルギー（ハミルトニアン）

$$H = \frac{v^2}{2} + U(x, y) \quad (9)$$

の値を  $H = 0.1$  とし、3つの違う初期条件から数値的に軌道を計算した結果である。



これだけを見ていると別にどうということはないが、ここでいわゆるポアンカレ断面というものを書いて見ると非常に面白いことになっていると分かる。ポアンカレ断面とは、この場合のような自由度が2のハミルトン力学系で、一方の変数、例えば  $x$  が0になる時に  $y, v_y$  の値を書いたものである。



まず、 $H = 1/12$  の場合を示す。

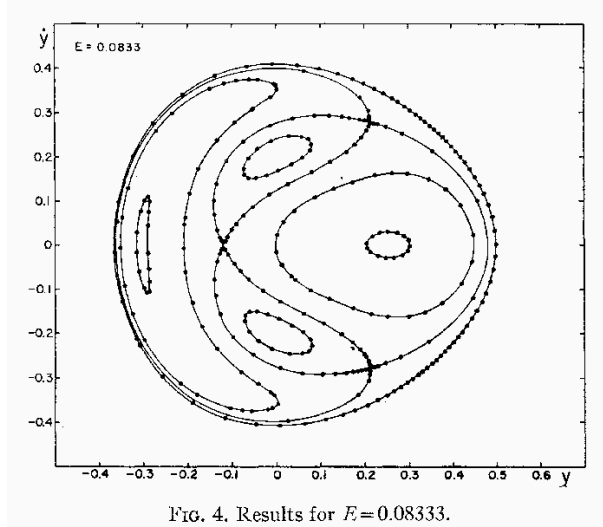


FIG. 4. Results for  $E=0.08333$ .

ここで、つながって線になっているのは基本的には一つの軌道であり、分かれた曲線は別の初期条件からの軌道に対応している。エネルギー保存を考えると、 $x = 0$  で  $v_x^2 \geq 0$  なので、 $(y, v_y)$  はある閉領域の中にくる。保存量がエネルギーだけであれば、任意の初期条件から出発した軌道はこの領域の全ての点をいつかは通ると考えられるが、このようにそうならないということは、なんだかわからない保存量のようなものがあるということを示している。元々の軸対称ポテンシャルに戻ると軸回り角運動量は保存しているが、これは有効ポテンシャルにして回転方向の速度を消去するのに使っているの、2次元問題になった後では無関係である。

軸対称ポテンシャル内での運動にエネルギーと角運動量以外の保存量があるかどうかという問題は、「第3積分問題」と呼ばれる恒星系力学上の現在でも完全には解決されているとはいえない問題の一つである。とりあえずこの場合には、第3積分が存在しているように見える。

但し、妙なのは、ポアンカレ断面上の軌跡が交点をもつように見えることである。実際には、この「交点」のところを精密に調べると、奇妙なことがわかる。交点近くの十分に狭い領域では運動の積分が無くなって、ある領域内を軌道が埋めているのである。

この領域はエネルギーを大きくするとどんどん大きくなる。次は  $E = 1/8$  の場合である。

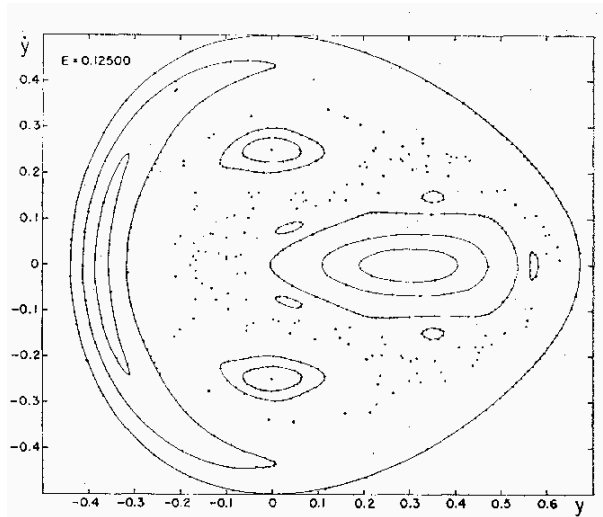


FIG. 5. Results for  $E=0.12500$ .

保存量を持つ、規則的な運動をする領域よりも、規則的ではない運動をする領域のほうが広がってしまっていることが分かる。少なくとも恒星系力学では、このような場合に規則的な軌道を regular orbit, そうでないものを irregular orbit または chaotic orbit という。

さらにエネルギーの上限に近い  $-1/6$  をとったものが下である。

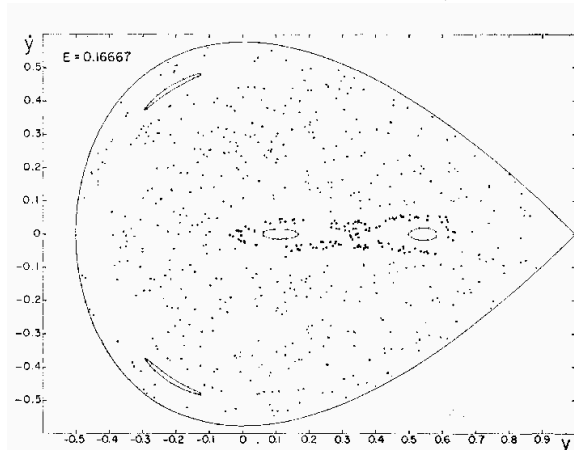


FIG. 6. Results for  $E=0.16667$ .

キャプションには  $1/6$  よりも大きいようなことが書いてあるが、気の迷いであろう。それはともかく、この場合にはほとんどの領域が規則的でない、つまり、第3積分をもたないような軌道になっていることが分かる。

これはカオス的な運動の典型的な例である。

ここではカオスかどうかを、エネルギー以外の積分がある(ように見える)かどうかで判断したが、実質的に同じことになるもうひとつの定義がある。それは、「十分に近い初期条件から出発した2つの軌道がどのように離れていくか」である。より厳密にはこれはリヤプノフ指数が正かどうかということになる。定義の詳細はここでは省くが、大雑把にはリヤプノフ指数が正なら十分近い2つの軌道が指数関数的に離れていく。このことは上の Hénon-Heiles 系でも観察され、周期的に見える領域では軌道は時間の1次で離れていくが、カオス的な領域では指数関数的に離れる。

## 4 無衝突系におけるカオスの役割

この講義ではほとんど球対称な系しか扱わなかった。球対称の場合には軌道は必ず regular なので、カオスのである幕はないが、軸対称になると既に原理的には良くわからないことが起きてくる。さらに、3軸不等な一般的なポテンシャルになると、多くの場合に chaotic orbit があることがわかっている。

あるポテンシャルでカオス的な軌道があるとすると、原理的には、では実際にそういう軌道が現実の銀河等で存在できるかということが問題になる。現在までのところ、例えば3軸不等な銀河モデルを構成しようという試みのほとんど全ては regular orbit の組合せでポテンシャルを再現しようとするものである。これは M. Schwarzschild (有名な K. Schwarzschild の息子。Stellar evolution の理論的研究で有名) が 1980 年代になって発展させた方法である。

ところが、前回考えたような、系の中心にブラックホールがあるようなものを持ってくると、あるタイプの軌道 (box orbit と呼ばれるもの) regular では無くなるということが知られている。これは、3軸不等な系や、軸対称でも回転している系、あるいはバーを持つ系では、カオス的な性質によって恒星がブラックホールの近くに来ることができるといえるかもしれないということを意味しており、ブラックホールの進化、成長についてなんらかの意味を持っているかもしれない。が、これはここ数年になってある程度理解が進んできた領域であり、まだ解明されていない問題のほうが多い。

## 5 衝突系におけるカオスの役割

衝突系では、カオスは球対称モデルであってもいたるところに現れる。

古典的な3体問題が、前にみたように「初期条件が非常に近い軌道が非常に速く離れる」という意味でも、また運動の積分がないように見えるという意味でもカオスになっている。もうちょっと一般的にいったら、一つ一つの粒子の軌道を見る、あるいは  $6N$  次元の  $\Gamma$  空間での系の軌道を見ると、それは必ずカオス的であるということがわかっている。

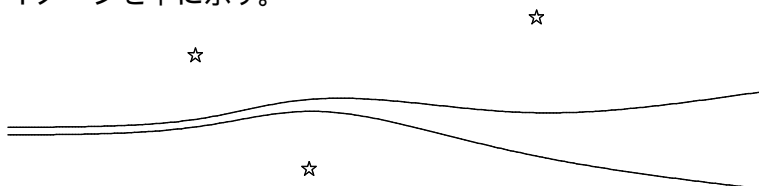
一見、このことは無衝突系は (例えば球対称なら) カオス的ではないとさっき断言したと矛盾するように見えるので、まずカオス的であるということの意味を考えておこう。

各粒子の軌道そのものは、リヤプノフ指数が正で、その時間スケールが自由落下時間  $t_{\text{ff}}$  の数分の一程度であるという意味でかなり強くカオス的であるか。これは、大雑把に言えば有効数字が  $t_{\text{ff}}$  あたり 1桁程度減っていくということであり、従って  $10 t_{\text{ff}}$  もたてば初期条件の精度が 64 ビット浮動小数点数の有効数字だけあったとしても、最終状態での個々の粒子の位置の精度は 10桁落ちて 5-6桁しか残っていない。つまり、2つ全く同一な系で、1つの粒子だけ初期条件の最後の 1 ビットだけ変えて計算を始めたとして、 $10 t_{\text{ff}}$  程度でそのずれが  $10^{10}$  倍にも増幅されるわけである。

これは、力学系自体の性質なので、例えば数値計算の精度の問題ではない。どれほど数値積分を正確に行なっても同じことである。球状星団や散開星団の進化の計算では、数千から数万クロッシングタイム程度の長さのシミュレーションを行なうが、その後で各粒子の位置が意味を持つためには計算精度が数万桁いるわけである。そんなことはできるはずがないので、多体シミュレーションでは必ず個々の粒子の位置は「正しく」ない。

このように指数関数的な成長が起きるのは、難しげにいうと  $\Gamma$  空間 ( $6N$  次元位相空間) での軌道

が双曲的であるからということになるが、もちろんこれは指数関数的に広がるというのの言い替えでしかない。具体的にミクロスコピックにみてどうやって広がるかというのを見てみると、これは結局他の粒子と近接遭遇した時に軌道間の距離が拡大される傾向があるからである。2次元の時のイメージを下に示す。



ここで、細かい人は3次元だと紙に垂直な方向では軌道が縮んでいるのではないかと思うかもしれない。軌道のずれの1次（線形）の分だけをとって計算するとそうなるが、ここでは実は2次の項の分が効き、そちらは拡大する方向に働くのである。

## 5.1 指数的成長と熱力学的緩和

このように初期条件の差が指数関数的に成長する時間スケール（大雑把に言って最大リアプノフ指数の逆数程度）と、系が熱力学的に緩和する時間スケールとの間にはなんの関係もないことに注意して欲しい。実際、熱力学的に緩和する時間スケールはほぼ粒子数に比例するのに対し、指数関数的成長の時間スケールは粒子数に無関係に一定なのである。さらに、指数関数的成長を担うのは、上に述べたように比較的近接した粒子同士の相互作用である。具体的には、距離が  $R/\sqrt{N}$  の程度のものの寄与が最大であるというのが少し計算するとわかる。この程度の距離まで粒子同士が近づくのはクロッシングタイムに1度程度であり、これは粒子数  $N$  に無関係である。これに対し熱力学的緩和を担うのは  $R/N$  から  $R$  までの全ての粒子との相互作用であり、従って近距離でのポテンシャルの形をすこし鈍らせることで、熱力学的緩和の時間スケールをあまり変えないで指数関数的成長の時間スケールのほうは非常に長くすることができる。

ここでよろしくないのは、熱力学的緩和とは「系が初期条件を忘れること」であり、また、初期条件の微小なずれが指数関数的に成長することがまさにその「忘れる」ことであるとなんとなく思ってしまうことである。

少し思考実験をしてみよう。今、非常に粒子数が大きい系を考え、そのなかで、ある位相空間の微小体積を考える。熱力学的緩和によって初期条件を忘れるとは、基本的にはその中にある粒子が系分布関数全体（というか、まあ、とにかくある程度の広さ）に広がるということであろう。それらが依然としてどこかに固まっていれば、緩和したとはいえない。では、指数関数的な成長でこの微小体積をどのように変形できるのだろうか？配位空間での大きさが、上の  $R/\sqrt{N}$  よりも小さいうちは、空間の少なくとも1方向に向かってはほぼ指数関数的に伸びていく。これは、他の粒子との散乱が基本的にはコヒーレントであるからである。つまり、微小体積の大きさに比べて散乱のインパクトパラメータが大きく、微小体積のなかの各粒子の軌道は基本的には同じように曲がる。同じように曲がるので、その差を考えると散乱するほうの粒子に近いほうが大きく、遠いほうは小さく曲がり、差が指数関数的に成長できるのである。

逆に、どんどん伸びていってある1方向に対して長さが  $R/\sqrt{N}$  を超えると、散乱のインパクトパラメータに比べて微小体積のほうが大きような散乱が頻繁に起きることになる。このような散乱では、上の場合のように線形に微小体積が引き延ばされるというような簡単な話にはならない。む

しる、長さが  $R/\sqrt{N}$  よりも十分大きい極限では、各粒子がどのような散乱を受けるかというのは他の粒子とはほとんど無関係になる。もちろん、非常にインパクトパラメータの大きな散乱に対しては依然としてコヒーレントなわけだが、それによる指数関数的成長の時間尺度はインパクトパラメータが大きくなるにつれて急速に長くなる。こうなると、各粒子間の距離は指数関数的には広がり得ない。散乱が無相関である極限では粒子間の距離は拡散的に広がることになる。

そういうわけで、指数関数的に軌道が広がるといっても、それはせいぜい  $R/\sqrt{N}$  程度の距離までである。そこから先は拡散的なので、平均的には  $\sqrt{t}$  に比例して距離が広がっていくということになる。

このため、粒子数が無限に大きい極限を考えると、軌道間の距離が指数関数的に成長できる領域が無限に狭くなるので、極限では軌道は regular と思ってよいことになるわけである。

もっとも、これは依然として「粒子の位置がどこかわからなくなる」ということを意味することには変わりはない。拡散的になってしまうというのは、要するに本当にランダムになってしまうということである。もちろん、原理的には決定論的なハミルトン系なのでランダム性なんてものはどこにもないが、しかし、非常に近くにある2粒子の距離が、まずは指数関数的に、それからランダム・ウォーク的に広がるわけである。繰り返しになるが、これは物理的な系のもとも持っている性質であり、数値計算で有限の精度でやるからそうなるかという問題ではない。

このことは、衝突系の  $N$  体数値計算には厳密な理論的裏付けがあるわけではないということを原理的には意味しているとも考えられる。「統計的な性質」、例えば熱力学的な進化は「正しく」表現していると一般的には信じられているが、厳密に数学的にそうかという難しい問題なわけである。