理論天文学概論

牧野淳一郎

2008 年 6 月 11 日

粗視化エントロピー、 violent relaxation

1 Landau Damping

ここは前回の残りである。前回は、ジーンズ不安定の不安定領域の振る舞いは流体と恒星系で定性的には同じだが、安定領域では流体は音波モードになるのに対して恒星系では普通の波はなく、完備なモードは van Kampen モードという超関数で書くようなものだという話をした。

さて、モードがあって、世の中はその重ね合わせであるというのなら、それで話はおしまいではないかとおもうのが人情だが、普通はそういう話にはなっていない。というのは、 Landau Damping という難しいものがあるということになっているからである。これはどういう原理ででてくるかというと、要するに複素数の ω があると信じて、そういう解を求めると、ちゃんとそういうものが見つかるというものである。つまり、摂動の速度方向の分布 f_a をうまくとってやると指数関数的に減衰するモードがでてくる。ただし、注意して欲しいのは、これは、 f_a に制限をつけないと出てこないということである。不連続な f_a を仮定すれば、時間のベキでしか減衰しないような解を構成することも出来る。ただし、そういった解はモードの形、つまり位置、時刻の指数関数の形に単純に書けるとは限らない。

逆にいえば、解が指数関数の形に書けると仮定すれば、ジーンズ波長より短ければそれは指数関数的に減衰するわけである。

今、簡単のために重力がない一次元系を考える。この時 van Kampen mode は単なる δ 関数なので、初期の波数が k であるような摂動は

$$f_1(x, v, t) = g(v) \exp[ik(x - vt)] \tag{1}$$

という形をしている。これは、自明な解になっているということは式を良く見ればわかる。

しかし、注意して欲しいのは、これは最初に安定性解析の時に仮定した $f_a(v) \exp[i(kx - \omega t)]$ という形とは違うということである。これは、振動数 ω が v そのものであり、速度空間のなかでの位置に依存するためである。

このことをいいかえると、上のような「自然な」解があるにもかかわらず、モード解析をすると van Kampen mode のような singular なものが出てくるのは、モード解析の仮定として位相速度が粒子の速度に寄らないようなものを考えたからであるともいえる。

さて、上の「自然な」解はどのように振舞うかをちょっと見てみよう。密度は、

$$\rho_1(x, t) = e^{ikx} \int g(v) e^{ivt} dv \tag{2}$$

これから、例えば $g(v)$ が

$$g(v) = \begin{cases} 1/2v_0 & |v| < v_0 \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{3}$$

みたいなものだと、 $1/t$ で減衰するという解がでてくる。

このような減衰が起きるのは、初期条件が非常に特別なものであるためであるということに注意してほしい。つまり、速度ごとに波の位相速度が違うのに、初期条件としてその空間位相がすべてそろったものを考えたわけである。そうすると、時間がたてば位相はずれていくので速度方向に積分して見た波の振幅は小さくなってくことになる。これは、速度方向の「波数」に時間が生で入ってくるためである。

なお、 $g(v)$ に適当な形を仮定すれば、もっと速く減衰するものも作れる。

もちろん、無衝突ボルツマン方程式にしたがった進化は可逆過程である（エントロピーを生成しない）ので、原理的には逆に振幅が大きくなるような初期条件も存在していないといけない。実際、減衰していく解で、どこかで時間反転すればそういう解が作れるわけである。

なお、今日の話で要領を得ないと思った人は、、、この辺は基本的で大事な問題であるわりにはあまり良いテキストも論文もないので、なかなか難しい。

2　粗視化エントロピー

前節で扱った、ジーンズ波長より短い摂動の（線形での）減衰は、無衝突系に固有の現象であり、流体ではこれに対応するものはない。ここでは、まず、その物理的意味についてもう一度考え直して置こう。

$$f_1(x, v, t) = g(v) \exp[ik(x - vt)] \tag{4}$$

初期の摂動の位相が v によらないとすれば、その時間発展は上式で与えられる。したがって、密度はこれを v で積分したものであり、式をじっとみればわかるように $g(v)$ のフーリエ変換になっている。したがって、$g(v)$ を選べばいろんな時間依存を持つものが作れることになる。

さて、すでに何度もいったことだが、無衝突系ではエントロピー生成はない。これは、分布関数 f が軌道にそって保存するからであった。しかし、上の式からわかるように、速度方向の構造は、時間がたつにしたがってどんどん細かくなっていってしまう。これに対して、実際の系では粒子数が有限であり、分布関数に無限に細かい構造をつくることが出来るわけではない。また、観測するとか、数値計算するとかいうことを考えると、どこかで分解能よりも構造が細かくなってしまうことになる。

つまり、通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dxdv \tag{5}$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ $g(x, v; h)$ というものを考え、

$$\int g(x, v; h) dxdv = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{h \to 0} \int fg(x_0 - x, v_0 - v; h) dxdv = f(x_0, v_0) \tag{7}$$

というようなもの、つまり、適当な極限で δ 関数になるようなものを考える。

で、粗視化された分布関数 $\hat{f}_h$ というものを

$$\hat{f}_h = \int fg(x - x_1, v - v_1; h) dx_1 dv_1 \tag{8}$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どういうことがいえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f} \ln \hat{f} dx dv \tag{9}$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

さて、ここで重要なのは、この「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらないということである。言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとしよう。そうすると、$\hat{S}$ は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

3 Landau Damping 続き

ちょっとここで話を変えて、もう一度 Landau Damping というものを考えてみる。最初の話では重力を無視したが、しないとどうなるか、ということである。

この解析は実は結構難しい。というのは、もともと phase mixing というものはあるので、重力が効くかどうかに無関係に摂動はどんどん減衰していくからである。しかし、とりあえず、重力を考えるとどんなことが起きるかをちょっと整理してみる。

今、とにかくポテンシャルの波というのがあって、速度 v_w で動いているとする。これに対して速度 v_p で動いている粒子があるとしよう。この粒子と波の相互作用というものを考えてみる。

今、 $v_p \sim v_w$ 、つまり大体同じ速さで動いていることにすると、粒子はその波に対する相対的位置によって受ける力の方向が変わる。波に対して遅れていれば引っ張られるし、そうでなければ減速される。このため、初期にどういう位相にいたかによって、大きくエネルギーをもらったり失ったりするものがあることになる。

ただし、波が無限に長い間維持されていれば、無制限にエネルギーをやりとり出来るわけではない。これは、座標変換して波が止まっている座標でみれば当然のことで、あるポテンシャルの谷のなかに止まっているか、それとも超えて動いていくかのどちらかであって平均すればエネルギーのやりとりは起きないことになる。

しかし、さらに、ポテンシャルの波が指数関数的に減衰する場合、というのを考えることができる。そうすると、それとつじつまがあうような分布関数の摂動とその減衰を考えることができる。

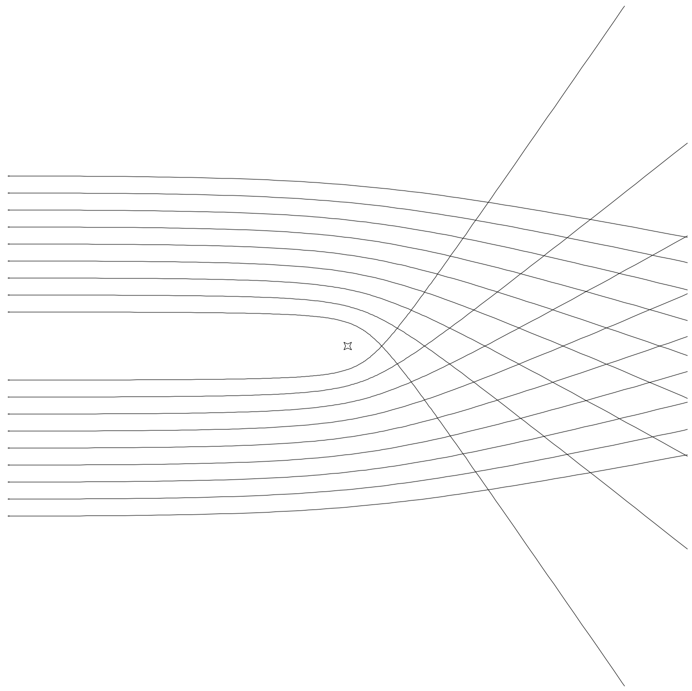
4 Dynamical Friction

さて、ここで少し違った状況を考えてみる。今、温度 0（だと、本当はジーンズ不安定が起きるわけだがこれはとりあえず考えない、すなわち自己重力は無視する）の、無限に一様な物質分布の中

を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動（質点によるものでも OK）が動いているとしよう。

座標系はこの質点の運動の方向を対称軸にとった円筒座標で考えていい。この時、バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のようになる。つまり、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっているのである。



回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速されなければならない。これが dynamical friction と呼ばれるものである。この効果は、別に動いているものが単純な質点のポテンシャルとかでなくても、3 次元空間のなかで有界なものが動いていれば常に働くということに注意してほしい。

すなわち、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないことになるが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

もうちょっと別な例としては、サイクロトロン加速をあげることができる。この場合、加速される粒子はエネルギーをもらっても周期が変わらないため、電場を周期的に掛けることで（非相対論的な範囲で）加速を続けることができる。

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。Dynamical Friction の例では、質点の運動エネルギー（これはエントロピーを持たない）が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

5 Violent relaxation

5.1 理論

ここまで述べてきたことは、

- 線形 Landau damping (重力無視の phase mixing) では、粗視化エントロピーを増やすことができる。
- 重力があっても、線形の phase mixing 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。

線形 Landau damping では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはあきらかであろう。しかし、重力がある場合はどうだろう？エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか？

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河というのは、結構たくさんあるわけだが、これはどれも似たような形をしている。これはたんに形が似ているというだけではなく、実は、半径方向の密度（表面輝度）分布に比較的に共通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる $r^{1/4}$ 則、あるいは Hernquist Profile で良く近似できているわけである。

楕円銀河がどういうふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、 Lynden-Bell (1967) は violent relaxation というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと以下のようなものである

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置（位相空間内での）によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを Lynden-Bell 統計と名付ける。
- 力学平衡に向かう間は、単に phase mixing だけが起こっているわけではなくこの Lynden-Bell 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、 Lynden-Bell 統計であって普通の Maxwell-Boltzman 統計には従わない理由は、 f の値に制約がある（初期の分布の最大値を超えられない）からであるそうである。

Lynden-Bell は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った（現在も持っている)。

5.2　帰結

上の、 violent relaxation が本当に有効に働くとすると、どんなことがおきることになるかをちょっと考えてみる。これによって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

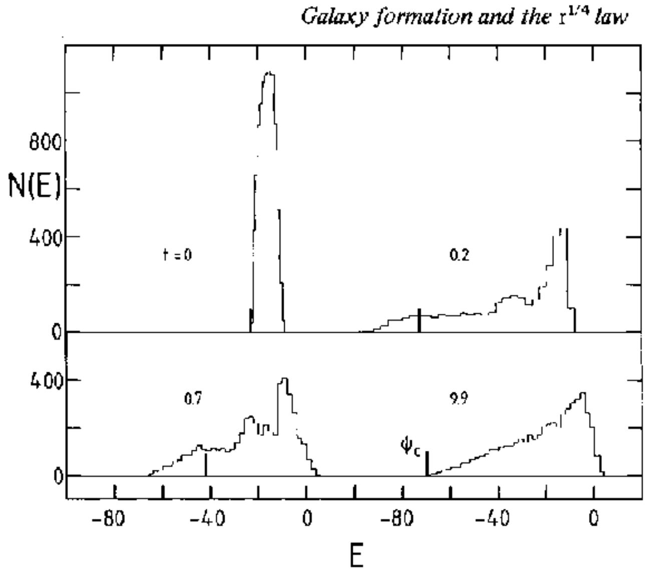
- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、（単位質量当たりの）エネルギー変化が位置だけで決まるからである。
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。普通の緩和過程では、エネルギーの高い粒子はそれを失う傾向があるし、低いものはもらう傾向があるが、そういう傾向は特にないためである。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

5.3　数値実験とその解釈

Violent relaxation というのは、いろいろな意味で魅力的な提案であったので、数値実験によって実際にそんなにうまくいくかどうか調べようという試みが多数なされている。ここでは、その代表的なものである van Albada (1982, MNRAS 201, 939) を取り上げて、どんな結果になったかをまとめる。

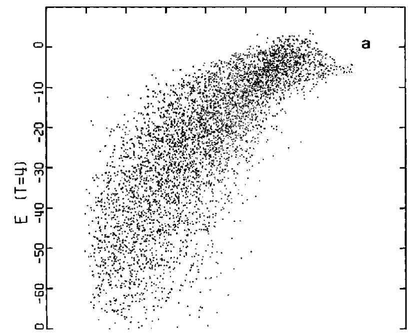
計算は極座標でポアソン方程式を球面調和関数展開してポテンシャルを求める計算法によっている。このために、 1982 年というかなり昔でありながら、5000 粒子というこの目的には十分な数の粒子（粒子の数の意味については来週扱う）を使うことができた。

初期条件は、粒子に少しだけランダム速度を与えて、大体球状（実際には、いろいろ変化させているが）に分布させ、手を離してどうなるか見るというものである。



この図は、あるケースについて $N(E)$ をプロットしたものである。 $N(E)$ は分布関数ではなく、 $N(E)dE = dN$ を満たすような、つまりはあるエネルギー範囲にある粒子の数である。これを使うのは、数値計算で実際に分布関数 f を求めるのはいろいろ困難があるのにたいし、理論計算では f から N を出すのは機械的だからである。

初期には狭いところに集まっているが、落ちついたあとでは広がっている。これは、ある程度まで violent relaxation というものが起こっているということを示してはいる。



これは、初期のエネルギーと落ちついた後のエネルギーの関係を示している。明らかにわかることは、非常に強い相関が残っているということである。つまり、もともとエネルギーが低かったものは相対的に低いまま、高いものは高いままに留まる傾向がある。

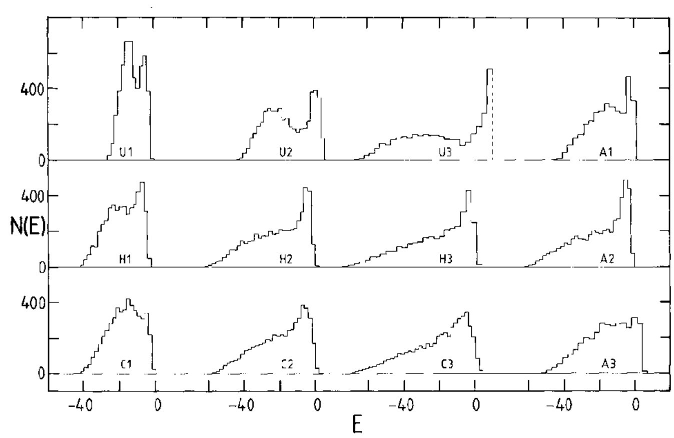


Figure 7. Histogram of binding energies for the final equilibrium models.

これはさまざまな初期条件からの結果をすべてまとめたものである。（$N(E)$ をプロット）初期条件によって、 $N(E)$ はいろいろであり、とてもある一つのものに向かうといえるようなものではないということが見てとれるであろう。

5.4 まとめ

結局のところ、 Lynden-Bell が主張したような violent relaxation は、全く働かないというわけではないが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけでもない。このために、無衝突系の最終状態は初期条件の記憶を強く残している。

例えば楕円銀河が合体で出来たという説に対する反論として、「合体したら violent relaxation によってよく混ざるはずであるから、 color gradient などの構造があるのはおかしい」という主張がなされたことがあったが、現在ではこれは合体説に対する反証とは考えられていない。

6 来週の予定

来週は、それでは楕円銀河がみんな似ているのはどうしてかという話を簡単にした後、無衝突系の議論から離れて、粒子数が有限の場合に問題となる二体緩和の話に入る。