自己重力多体系の物理

牧野淳一郎

2012 年 9 月 30 日

粗視化エントロピー、 violent relaxation

1 粗視化エントロピー

前節で扱った、ジーンズ波長より短い摂動の（線形での）減衰は、無衝突系に固有の現象であり、流体ではこれに対応するものはない。ここでは、まず、その物理的意味についてもう一度考え直して置こう。

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[ik(x-vt)] \tag{1}$$

初期の摂動の位相が v によらないとすれば、その時間発展は上式で与えられる。したがって、密度はこれを v で積分したものであり、式をじっとみればわかるように $g(v)$ のフーリエ変換になっている。したがって、$g(v)$ を選べばいろんな時間依存を持つものが作れることになる。

さて、無衝突系では普通の意味ではエントロピー生成はない。これは、分布関数 f が軌道にそって保存するからであった。しかし、上の式からわかるように、速度方向の構造は、時間がたつにしたがってどんどん細かくなっていってしまう。これに対して、実際の系では粒子数が有限であり、分布関数に無限に細かい構造をつくることが出来るわけではない。また、観測するとか、数値計算するとかいうことを考えると、どこかで分解能よりも構造が細かくなってしまうことになる。

つまり、通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dxdv \tag{2}$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ $g(x,v;h)$ というものを考え、

$$\int g(x,v;h)dxdv = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{h\to 0}\int fg(x_0-x, v_0-v;h)dxdv = f(x_0,v_0) \tag{4}$$

というようなもの、つまり、適当な極限で δ 関数になるようなものを考える。

で、粗視化された分布関数 $\hat{f}_h$ というものを

$$\hat{f}_h = \int fg(x-x_1, v-v_1;h)dx_1dv_1 \tag{5}$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どういうことがいえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f} \ln \hat{f} dx dv \tag{6}$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

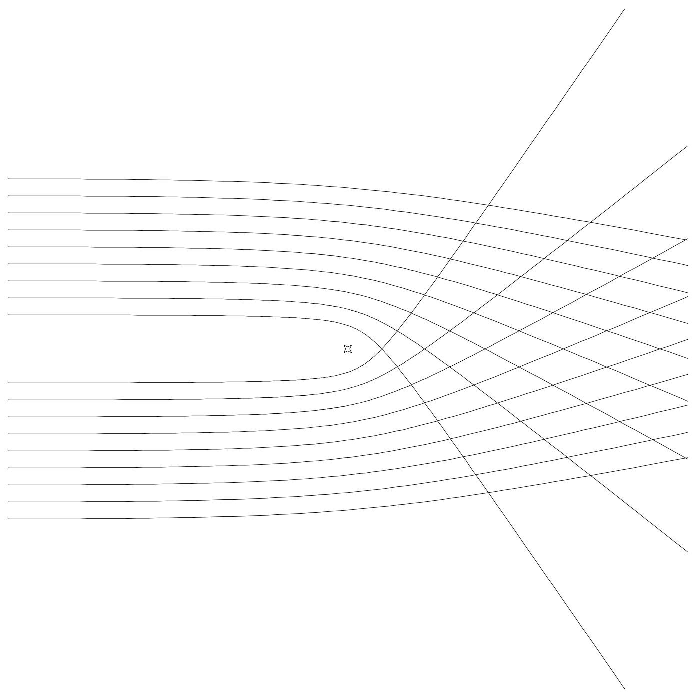
さて、ここで重要なのは、この「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらないということである。言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとしよう。そうすると、$\hat{S}$ は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

2 Dynamical Friction

さて、ここで少し違った状況を考えてみる。今、温度 0（だと、本当はジーンズ不安定が起きるわけだがこれはとりあえず考えない、すなわち自己重力は無視する）の、無限に一様な物質分布の中を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動（質点によるものでも OK）が動いているとしよう。

座標系はこの質点の運動の方向を対称軸にとった円筒座標で考えていい。この時、バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のようになる。つまり、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっているのである。



回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速されなければならない。これが dynamical friction と呼ばれるものである。この効果は、別に動いているものが単純な

質点のポテンシャルとかでなくても、3 次元空間のなかで有界なものが動いていれば常に働くということに注意してほしい。

すなわち、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないことになるが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

もうちょっと別な例としては、サイクロトロン加速をあげることができる。この場合、加速される粒子はエネルギーをもらっても周期が変わらないため、電場を周期的に掛けることで（非相対論的な範囲で）加速を続けることができる。

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。Dynamical Friction の例では、質点の運動エネルギー（これはエントロピーを持たない）が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

3 Violent relaxation

3.1 理論

ここまで述べてきたことは、

- 無衝突過程では (phase mixing では)、粗視化エントロピーを増やすことができる。
- 重力があっても、線形の phase mixing 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。

phase mixing では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはあきらかであろう。しかし、重力がある場合はどうだろう？エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか？

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河というのは、結構たくさんあるわけだが、これはどれも似たような形をしている。これはたんに形が似ているというだけではなく、実は、半径方向の密度（表面輝度）分布に比較的に共通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる $r^{1/4}$ 則、あるいは Hernquist Profile で良く近似できているわけである。

楕円銀河がどういうふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、 Lynden-Bell (1967) は violent relaxation というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと以下のようなものである

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。

- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置（位相空間内での）によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを Lynden-Bell 統計と名付ける。
- 力学平衡に向かう間は、単に phase mixing だけが起こっているわけではなくこの Lynden-Bell 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、 Lynden-Bell 統計であって普通の Maxwell-Boltzman 統計には従わない理由は、 f の値に制約がある（初期の分布の最大値を超えられない）からであるそうである。

Lynden-Bell は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った（現在も持っている）。

3.2 帰結

上の、 violent relaxation が本当に有効に働くとすると、どんなことがおきることになるかをちょっと考えてみる。これによって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

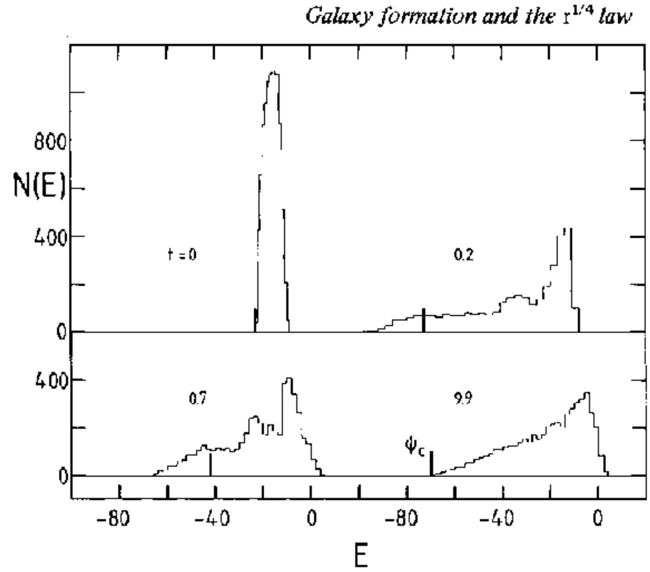
- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、（単位質量当たりの）エネルギー変化が位置だけで決まるからである。
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。普通の緩和過程では、エネルギーの高い粒子はそれを失う傾向があるし、低いものはもらう傾向があるが、そういう傾向は特にないためである。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

3.3 数値実験とその解釈

Violent relaxation というのは、いろいろな意味で魅力的な提案であったので、数値実験によって実際にそんなにうまくいくかどうか調べようという試みが多数なされている。ここでは、その代表的なものである van Albada (1982, MNRAS 201, 939) を取り上げて、どんな結果になったかをまとめる。

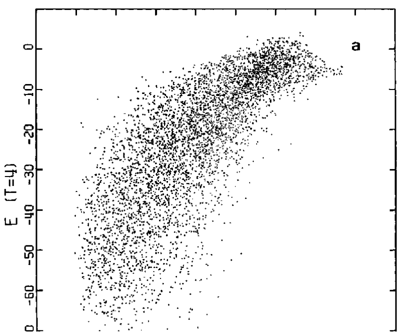
計算は極座標でポアソン方程式を球面調和関数展開してポテンシャルを求める計算法によっている。このために、 1982 年というかなり昔でありながら、5000 粒子というこの目的には十分な数の粒子（粒子の数の意味については来週扱う）を使うことができた。

初期条件は、粒子に少しだけランダム速度を与えて、大体球状（実際には、いろいろ変化させているが）に分布させ、手を離してどうなるか見るというものである。



この図は、あるケースについて $N(E)$ をプロットしたものである。 $N(E)$ は分布関数ではなく、$N(E)dE = dN$ を満たすような、つまりはあるエネルギー範囲にある粒子の数である。これを使うのは、数値計算で実際に分布関数 f を求めるのはいろいろ困難があるのにたいし、理論計算では f から N を出すのは機械的だからである。

初期には狭いところに集まっているが、落ちついたあとでは広がっている。これは、ある程度まで violent relaxation というものが起こっているということを示してはいる。



これは、初期のエネルギーと落ちついた後のエネルギーの関係を示している。明らかにわかることは、非常に強い相関が残っているということである。つまり、もともとエネルギーが低かったものは相対的に低いまま、高いものは高いままに留まる傾向がある。

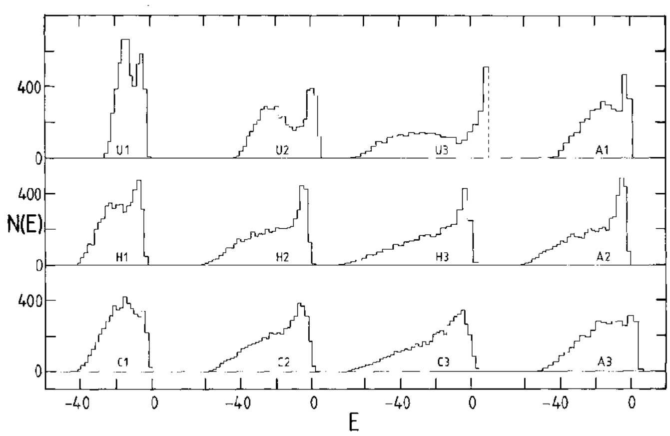


Figure 7. Histogram of binding energies for the final equilibrium models.

これはさまざまな初期条件からの結果をすべてまとめたものである。($N(E)$ をプロット) 初期条件によって、 $N(E)$ はいろいろであり、とてもある一つのものに向かうといえるようなものではないということが見てとれるであろう。

3.4 まとめ

結局のところ、 Lynden-Bell が主張したような violent relaxation は、全く働かないというわけではないが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけでもない。このために、無衝突系の最終状態は初期条件の記憶を強く残している。

例えば楕円銀河が合体で出来たという説に対する反論として、「合体したら violent relaxation によってよく混ざるはずであるから、 color gradient などの構造があるのはおかしい」という主張がなされたことがあったが、現在ではこれは合体説に対する反証とは考えられていない。

Violent relaxation の主張というのは、要するにシステムが力学平衡から遠く離れていれば、全体として振動する。その振動が系の各粒子のエネルギーを位相に依存する複雑な方法で変化させるので、これはランダムな変化と同様になり、系をある平衡状態に導くというものであった。しかし、数値実験の結果はそうなっていないし、それは基本的には上のメカニズムが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけではないということで理解できる。

それならば、楕円銀河がそれなりによく似ているということには、さらにまた別の説明が必要であるということになろう。ここでは、2つの考え方を紹介する。

3.5 N(E) の連続性

Violent relaxation で「平衡状態」にいくというわけではないにしても、楕円銀河が円盤銀河とはちがった何らかの力学的な進化、すなわち Lynden-Bell が想定したような系全体の振動のようなものを経験したと考えるのはそれほど不自然ではないであろう。

では、そのような系全体の振動というものを考えた時に、分布関数についてなにかいえることはないだろうか?実は、問題が3次元であるということから、分布関数が特徴的な性質をもつであろうということが直接にいえる。80 年代以降、このことは「何となく」理解されていたようであるが、ある程度明確に述べたのは、 IAU Symposium 127 “Structure and Synamics of Elliptical Galaxies” での Scott Tremaine (Conference Summary) と W. Jaffe (Poster) の発表であったようである。

Tremaine の記録に残っている集録原稿は要領を得ないものであるので、以下 Jaffe にしたがって簡単にまとめる。

何らかの原因、例えば他の銀河と合体するとか、合体しないまでも近くを通り過ぎるとかで大きな振動が励起されたとする。すると、それが構成する各粒子のエネルギーを変化させることになる。

エネルギーが変化した粒子のなかには、もちろん、エネルギーが正、すなわち系に束縛されなくなってそのまま無限遠にいってしまうものもある。また、そうでなくても、エネルギーがある程度 0 に近ければ、一旦遠くにいって、また戻ってくる頃には系はほとんど落ちついているので、それ以上エネルギーが変化するということはない。

このような、エネルギーが 0 に近い粒子の分布というものを考えてみる。なんらかの熱平衡のようなものを考えると、このあたりに粒子がたくさんないといけないことになる。というのは、エネルギーが高いほど空間的な体積が大きいので、熱平衡になるためにはその体積にくまなく粒子を分布させる必要があるからである。熱平衡とすれば、結局エネルギーが高くなるほど粒子が多いことになって質量が発散してしまうのは前に述べた通りである。

しかし、実際にこのようなエネルギーが 0 に近い粒子が形成されるプロセスを考えてみると、このような熱平衡にいくとか質量が発散するとかいうことは起こらない。これは、このプロセスが、エネルギー 0 の平衡状態に相当する遠く離れたところで起きるのではなく、系の中心付近でしか起こらないからであり、また、このプロセスがすぐに止まってしまうからでもある。

結果として、エネルギーが 0 に近い粒子というものは確かに作られるが、その分布は熱平衡を満たすようにはならない。ではどうなると考えられるであろうか？実際にそういった粒子が出来るところを考えてみると、例えばエネルギーが正になってしまうかどうかを知っているわけではないし、どれくらいの phase volume があるかどうかということを知っているわけでもない。従って、エネルギーが 0 に近い粒子の分布は、$N(E)$ が 特異でない（発散したり 0 にいったりしなくて、おそらく微分可能である）ということによって特徴付けられると考えていいと思われる。

実際、前回例に出した van Albada の数値実験では多くの場合にそうなっていたわけである。

これは、 $N(E)$ が、 $E = 0$ の付近、すなわち、大雑把にいって $r \to \infty$ の極限で、 $N(E) = N_0 + N_0'E \cdots$ の形の展開を持ち、特に $N_0 > 0$ であるということを意味する。

3.6 N(E) から分布を？

さて、$N(E)$ について何かわかったとして、それから直ちに分布関数 f なり密度 ρ についてなにかいえるわけではない。仮に球対称を仮定したとしても、角運動量分布の自由度があるからである。以前にジーンズ方程式について議論した際に、系の中心にカスプがあるというような観測から分布関数やポテンシャルについてなにかをいうことは必ずしも可能ではないということがわかった。今回も同じような困難があるのではないだろうか？

とりあえず、困難はおいておいていろいろやってみることにしよう。定義により「十分外側」を考えるので、ポテンシャルは

$$\Phi = -M/r \tag{7}$$

で与えられるとする。単純な例として、すべての粒子が円軌道を回る、すなわち最大の角運動量を持つ場合を考える。もちろんこんなことは現実にはあり得ないが、とりあえず計算は簡単なのでいいことにしよう。円軌道の式からすぐにわかるように、

$$E = -\frac{M}{2r} \tag{8}$$

である。つまり、エネルギーが決まれば中心からの距離が決まる。したがって、密度を求めるにはヤコビアンを計算すればいい。つまり

$$dM = |4\pi r^2 \rho dr| = |N(E)dE| \tag{9}$$

と、式 8 からでる

$$\frac{dE}{dr} = \frac{M}{2r^2} \tag{10}$$

から、

$$\rho = \frac{MN(E)}{8\pi r^4} \tag{11}$$

を得る。

円軌道は特殊なので、もうちょっと違うことを考えれば違う答がでるのではないかと心配になるが、たとえば Jaffe (1987) は、等方的な場合にもやはり $\rho \propto r^{-4}$ を示している。もちろん、これもあまり信用できるわけではない、というのは、実際の粒子の分布は、角運動量に強く依存するものになっていると考えられるからである。

それなら、逆の極限、すなわち、すべての粒子が角運動量を全く持たない場合はどうであろう？実は、この場合にも円軌道と同じ結果になることがわかる。これは、実際に軌道が解けるので、エネルギーごとにある位置への滞在確率を求めて積分すれば密度が求まるが、その式から結局滞在確率が外にでてしまうからである。

もうちょっと厳密に示そう。あるエネルギー E の粒子が、中心からの距離がある範囲 $(r, r+dr)$ にいる確率が $P(E,r)dr$ で書けるとすれば、密度は

$$4\pi r^2 \rho = \int_{E_r}^{0} P(E,r)N(E)dE \tag{12}$$

で与えられる。ここで E_r は距離 r に到達できるエネルギーの最小値であり、$-M/r$ で与えられる。いま、ケプラーポテンシャルのなかでの直線軌道を考えているので、 $P(E,r)$ は書き下すことができ、特に

$$P(E,r) = P_0(r/r_E)/r_E \tag{13}$$

の形に表現できる。ここで $r_E = -M/E$ である。さらに $x = rE/M$ という変数変換を行なって適当に整理すると、

$$\rho = \frac{M}{4\pi r^4}\int_{-1}^{0} -P_0(x)xN(Mx/r)dx \tag{14}$$

これから、 $r \to \infty$ の極限で、積分の中が収束することがわかる。従って、すべてが radial orbit の場合も円軌道の場合もおなじことになる。

それでも一般に J に分布があったら違うのではと心配になる向きは、実際に計算してみよう。つまり、 $N(E,J)$ の形で実際に分布を与え、J についての依存性にどのような制約があれば上と同様の結果が得られるか調べてみよう。ここでは結論だけを述べておくと、かなりゆるい条件のもとで OK であることがわかっている。

3.7　N(E) についてのまとめ

結局、比較的一般的な条件として、自己重力系で力学平衡から大きくずれた振動などを経験した場合には、 $N(E)$ が $E \sim 0$ で連続という条件から、 $\rho \sim r^{-4}$ という結論が出せる。これは、前にモデルのところででてきた Hernquist model や Jaffe model に共通な性質であり、これらは、（中心部の構造が全く違うにも関わらず）どちらも楕円銀河に良く合うとされている。「観測的に楕円銀河の性質が共通である」というのはその程度の意味であると考えるべきかもしれない。つまり、基本的には外側のほうで $\rho \sim r^{-4}$ に漸近していくような構造というのが本質ではないかと考えられる。