計算機の中に宇宙を作る
— 重力多体系とその周辺

牧野淳一郎

(6/1 から国立天文台理論研究部)

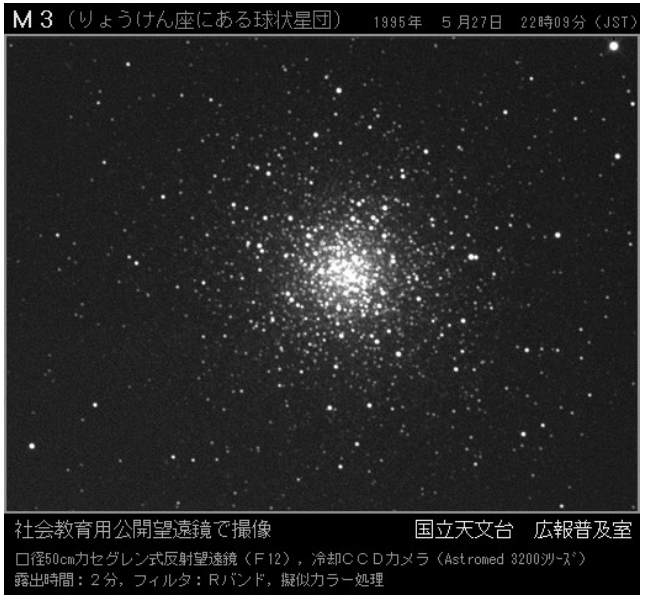
講義概要

1. 重力多体系とは？
    - 基礎方程式
    - 例
    - 進化の物理過程
2. 理論研究の方法
3. シミュレーションの方法

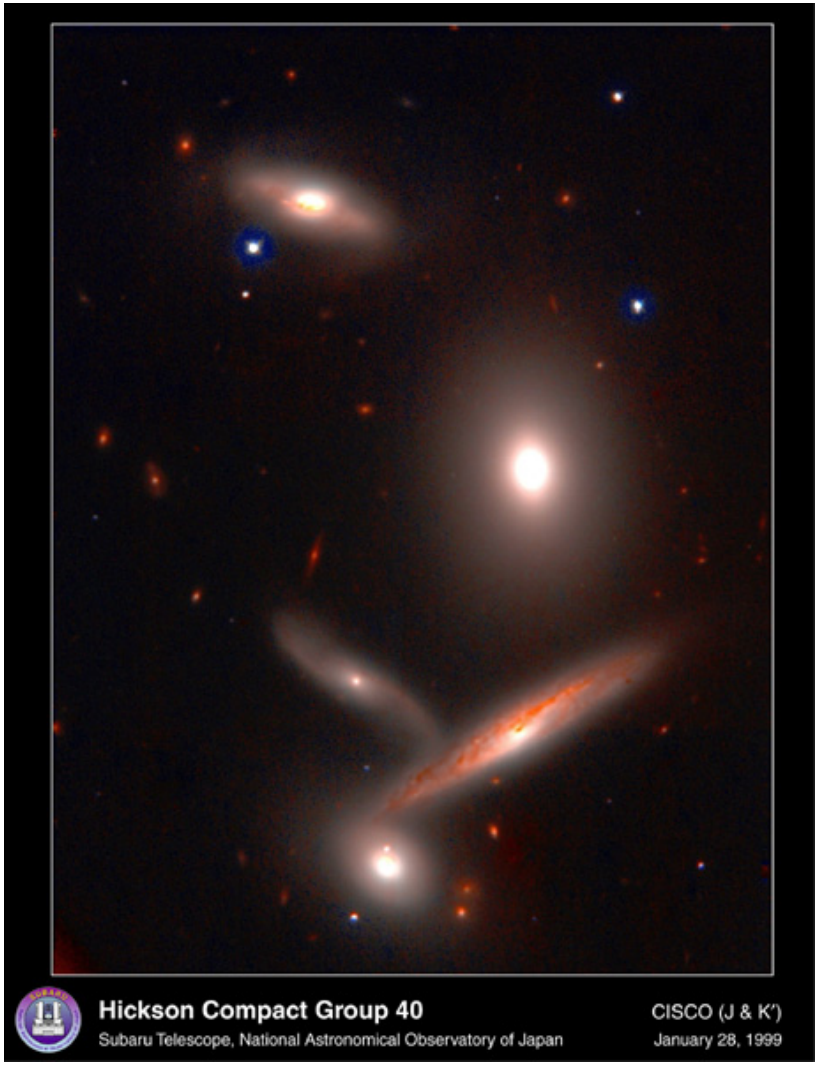
そもそもどんなもの？(観測)

銀河

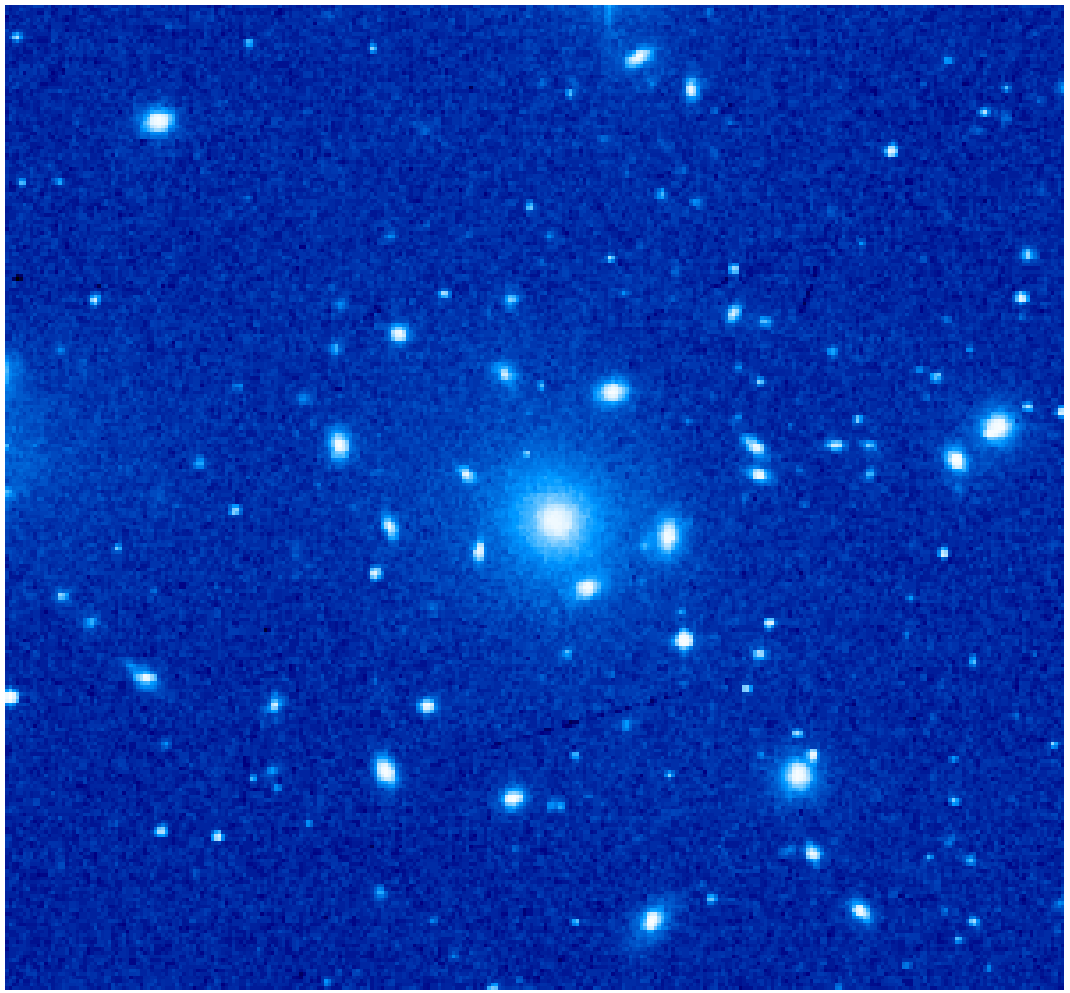
球状星団



銀河群

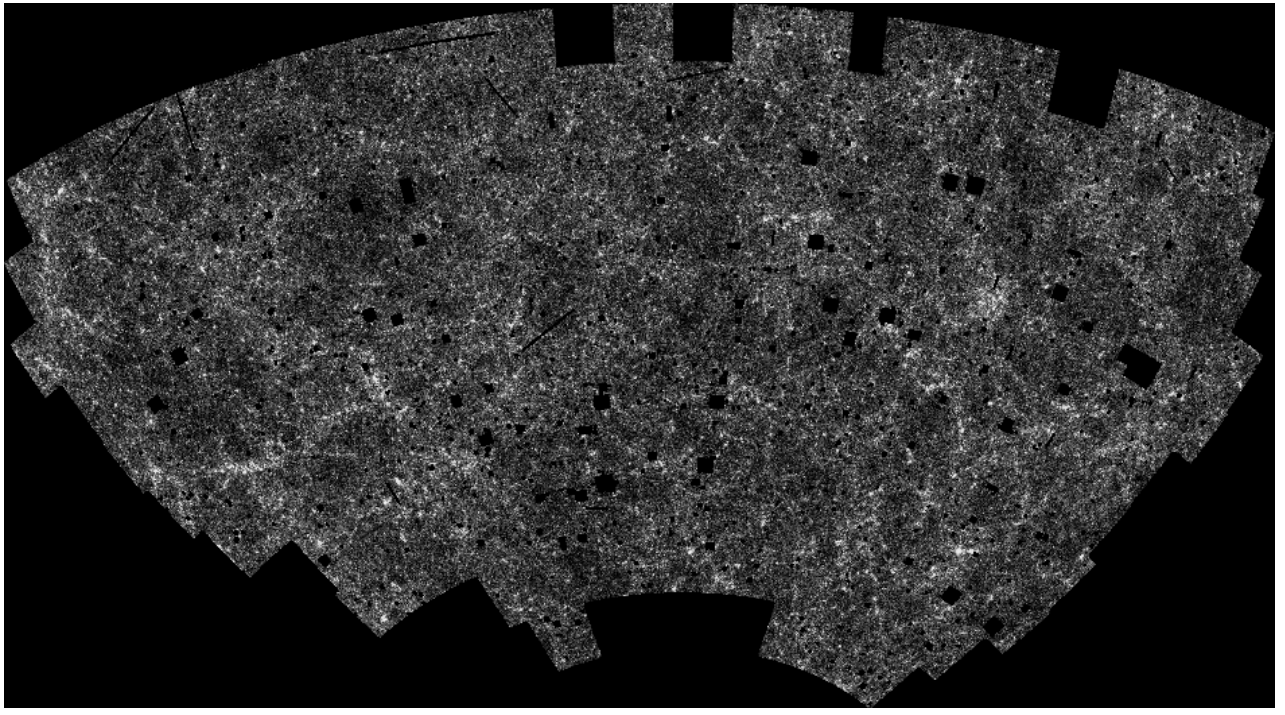

Hickson Compact Group 40
Subaru Telescope, National Astronomical Observatory of Japan
CISCO (J & K')
January 28, 1999

銀河団



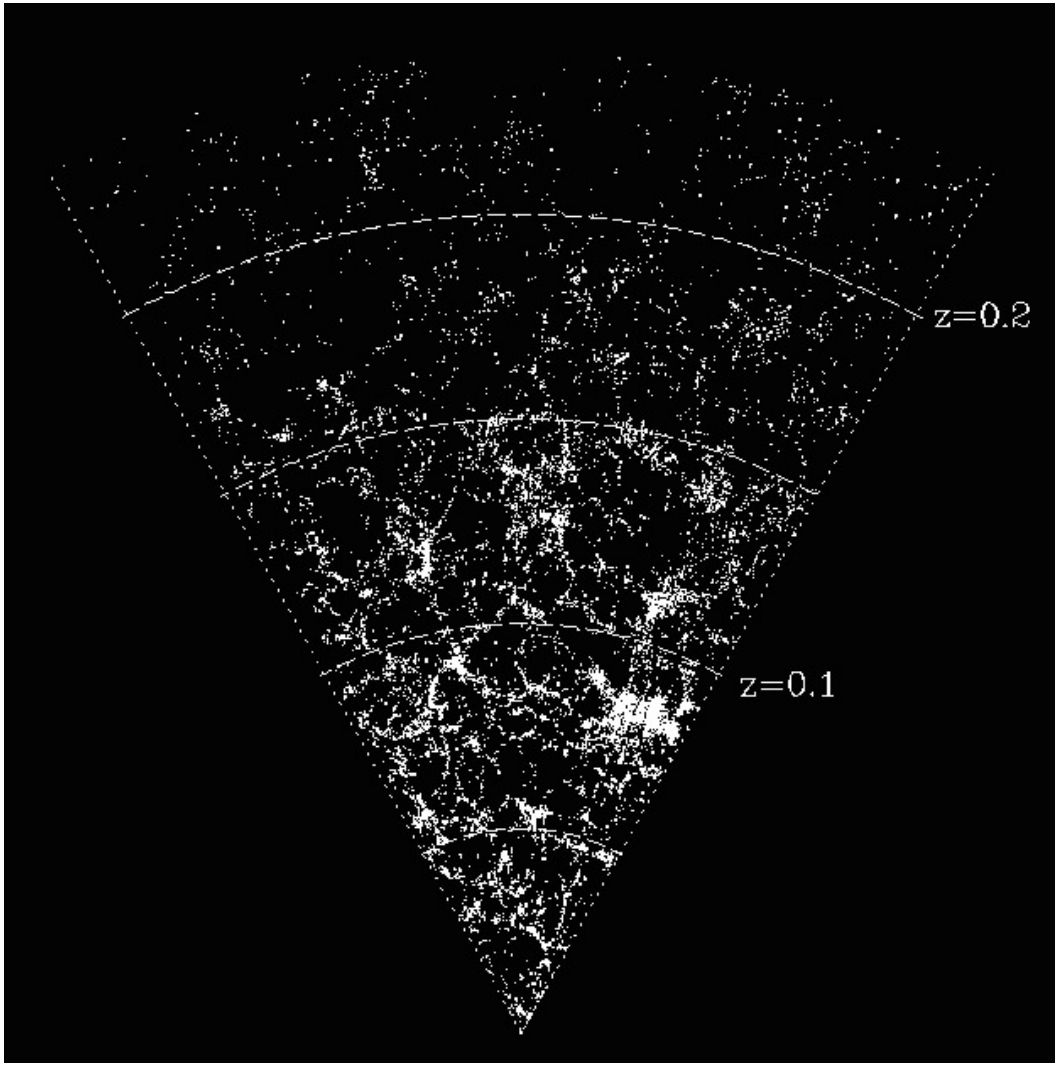
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

計算機「実験」

実際に星や惑星をどこかにおいて実験するのは不可能

計算機で支配方程式を積分することで実験の代わりにする

＝「計算機実験」

実験そのものとはちょっと違う

- こちらが入れた物理法則以外は入ってこない（はず）
- 計算があっているとは限らない

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？ — Newton 以来の疑問。

- **太陽系**
- **銀河**
- **宇宙全体**

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からのに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されたとはいい難い大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20世紀後半の）理解

20世紀後半には**太陽系が本当に安定かどうか？**というのは、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の「整理」

安定これは実はあんまり明確に定義されていない。太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないという意味。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。（多重）周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の「整理」(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

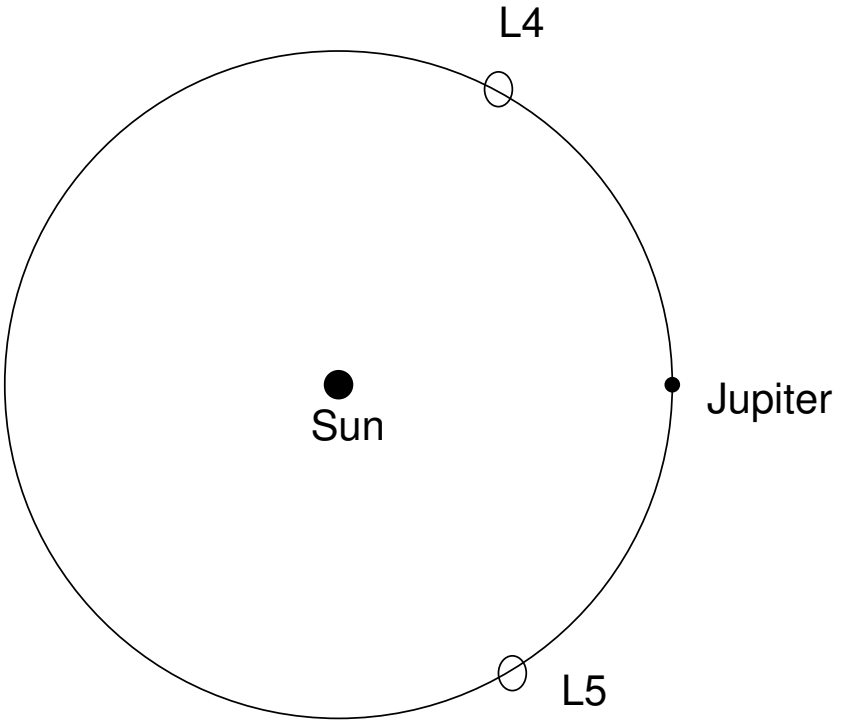
3体問題の性質

一般の3体問題は可積分ではない： ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

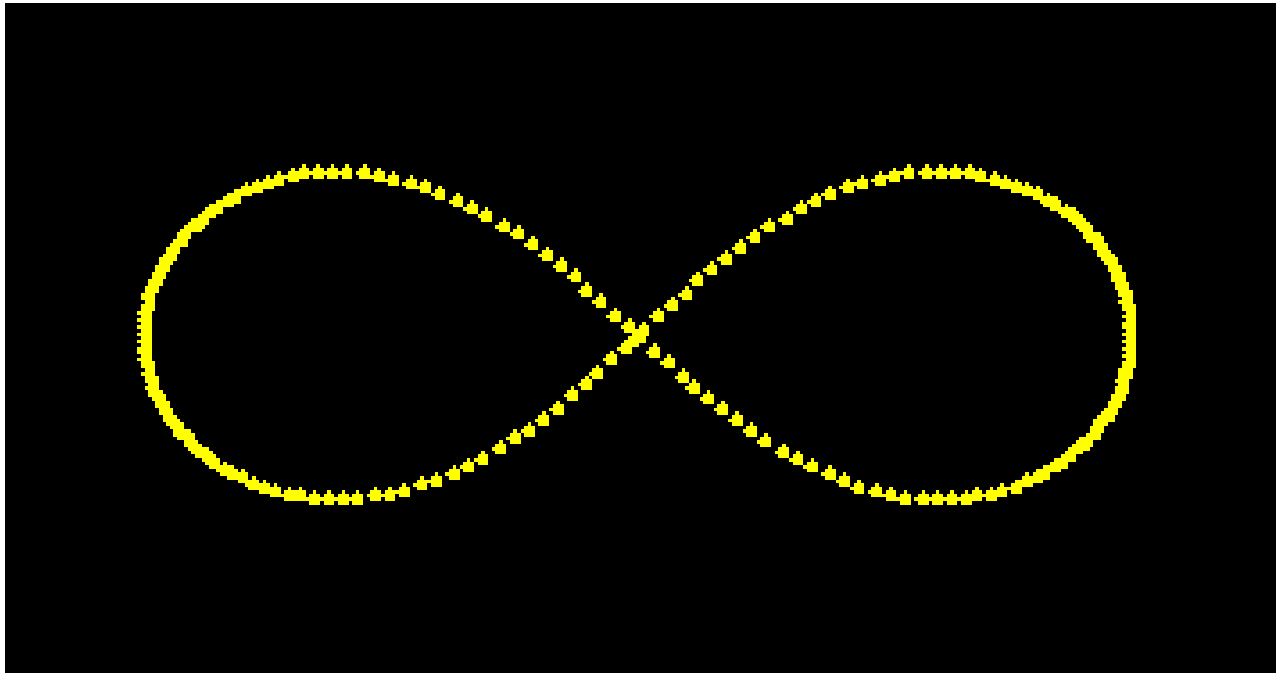
安定な解の例

ラグランジュ解（正３角形解）。
2,3 個めの質量が十分小さければ安定。
太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。
（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、、、）



ちょっと余談

数年前に発見された新しい安定軌道 — Figure-8 Solution



アニメーション（教養学部情報図形科学教室・船渡さん、 Edinburgh 大学 Douglas Heggie 提供）

Figure-8 solution

- 3個の質量がほぼ等しい $(0.005\%$ 程度$)$ の時にだけ安定（らしい）
- 数値的に（計算機で）周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

「計算機で軌道を追いかける」とはどういうことか？

計算機による軌道計算

ある運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{1}$$

と初期条件

$$x(0) = x_0, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = v_0 \tag{2}$$

が与えられたとして、そのあとの時間発展を計算機で求めること。

具体的な方法

基本的には、最初の位置（と速度）からちょっと後の時刻の位置を求めるというのを繰り返す。

もっとも基本的な方法：オイラー法

1 変数で書くと

$dx/dt = f(x)$ に対して、

$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t))$ と近似するもの。

つまり、ある時刻での解のテイラー級数展開の 1 次の項までをとったもの

もっと効率の良い方法が一杯研究されている

で、安定性はどうなったかというと

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。軌道間の距離がe 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- リアプノフ時間は確かに 2千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはある意味よくわかっていない。

天文学的な太陽系の安定性という観点からは、100億年計算してそこにあればいいというところもある。

より理論的な問題としてはまだ未解決といえる。

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に移る。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

ニュートンが考えたこと：

太陽と同じような星が宇宙全体に広がっているとすれば、それらはお互いの重力で集まったり落ちてきたりぶつかったりしないか？

本人が考えた解答：

落ちてくるのには１億年くらいかかるから大丈夫
（というか、宇宙の年齢がこれで決まる？）

現代的な解答：

2つの問題があることになる。

- 宇宙全体としてはなにがおきているのか
- 一つ一つの星、太陽系、銀河とかについてはどうか？

宇宙全体としてはなにがおきているのか？

「宇宙論」の基本的問題。

＝宇宙空間というものはどうやってそこに存在できているか？

一般相対性理論で始めて本当に扱えるようになった問題。

ものが落ちないようにする方法

- 「反重力」でささえる
- 宇宙は広がっているということにする。重力で減速はしている。
- 上の2つの組合わせ

「反重力」なんての超科学かトンデモかと思うかもしれないけど、これはそうでもなくてアインシュタイン自身のアイディア。そういうもの（宇宙項）があるということにすると空間が落ちてこないで済む。

宇宙膨張

宇宙が全体として膨張しているとすればアインシュタイン方程式に宇宙項をつけなくても解がある：ルメートルとかド・ジッターのアイディア。これは 1920 年ころ。

遠くの銀河を観測すると本当に距離に比例した速度で遠ざかっているらしいとわかってきたのが 1930 年頃。

最初は速度ー距離の比例係数の見積りがいまと 10 倍違ったのでいろいろ混乱があった。

宇宙膨張の問題点

当初の問題：

宇宙の年齢が今の $1/10$ になって、放射性元素で決めた地球の年齢よりずっと若くなった。

これを回避するために、「膨張するけれど定常で年齢は無限大」といったモデルも考えられた。

最近は大きな矛盾はなくなってきている（一応）。

宇宙膨張の数学

ニュートン力学で考えても振舞いは同じなので以下簡単に：

宇宙は一様でどこでもものの密度ρが同じであると考える

で、ある半径Rの球を考える。その表面での重力加速度は

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R^3/R^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (3)$$

ここで、加速度は半径に比例することに注意。

数学（続き）

宇宙全体が一様膨張または収縮するという状況を考えると、ある点（半径）の運動方程式は単に重力がその中にある質量に比例することになるので、ケプラー問題と同じ（だが、一次元）になる。

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi GM/r^2 \tag{4}$$

ここで M は時刻が同じなら ρr^3。 違う時刻では、「長さがどう変わったか」というものを $a(t)$ という関数であらわすことにすると

$$\rho(t) = \rho_0/a^3, \quad r = r_0 a \tag{5}$$

数学（続き2）

a の従うべき方程式は結局

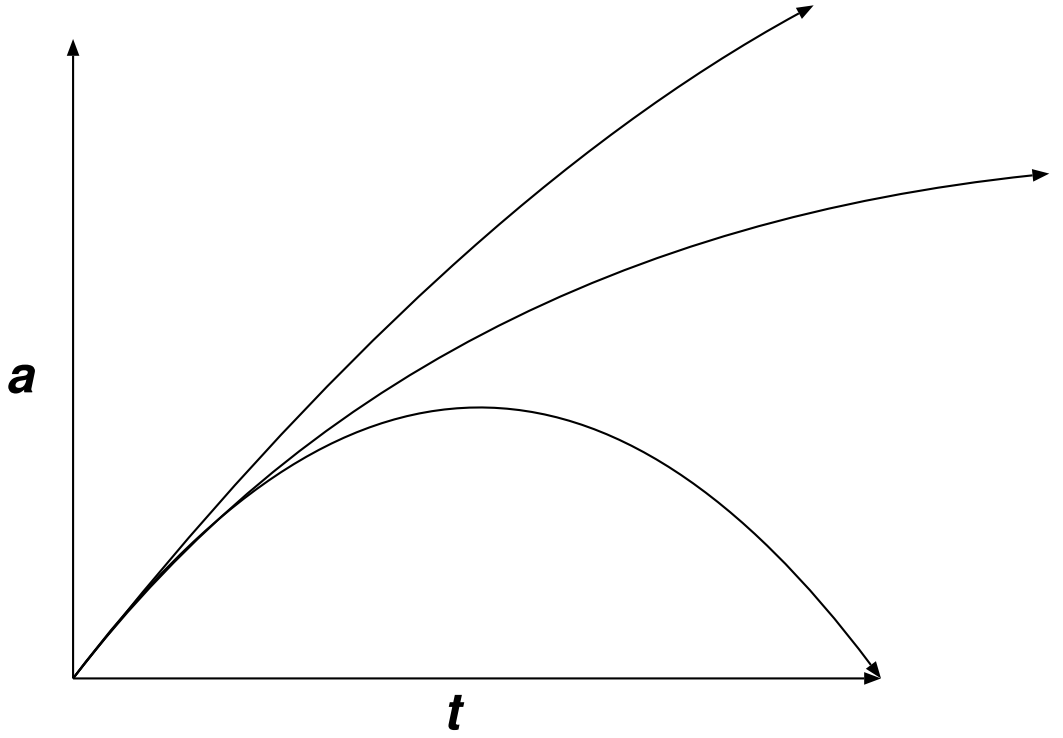
$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0/a^2 \tag{6}$$

この解は初期条件によって

- 無限に膨張する。無限の時間たっても有限の速度で膨張
- 無限に膨張する。無限の時間たつとちょうど速度が 0
- どこかで収縮を始めてまた一点に戻る

宇宙膨張の３通り

それぞれが２体問題の双曲線解、放物線解、楕円解に対応



現実の宇宙は？

決定的な証拠があるとはいい難いが、いまのところいろいろな観測結果ともっとも矛盾しないのは、

- 無限に膨張する
- しかも、単純な双曲線解よりも最近膨張が速くなっている

というのが一番「本当らしい」

(野本の講義で詳しくやったと思う)

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題は依然として残っている。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは)一様で密度一定であるとしても、小さなスケールになると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、ものが集まってできるのが銀河とか銀河団ということになる。つまりは、ニュートンが最初に心配した、「星が落ちてくるのではないか」という問題に対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる)

ダークマター?

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量）：例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X 線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

ダークマターは何か？

大きくわけて 2 つの理論：

- Hot dark matter 質量をもったニュートリノが大量にあって、それが宇宙の物質のほとんどを占めている。
- Cold dark matter 未知の素粒子があってそれが宇宙の物質のほとんどを占めている。

実はニュートリノではうまくいかないということがわかっている。（ことになっている）この場合銀河団とか大きいものはできていても銀河はまだできていないことになってしまうため。

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうにいえば「未知の素粒子」、わかりやすくいえば**なんだかわからないもの**である。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（理学系天文学専攻・矢作さん提供）

ここでやっていること：

- **基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する**
- **理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える**
- **理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える**
- **あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと**

銀河団形成のシミュレーション

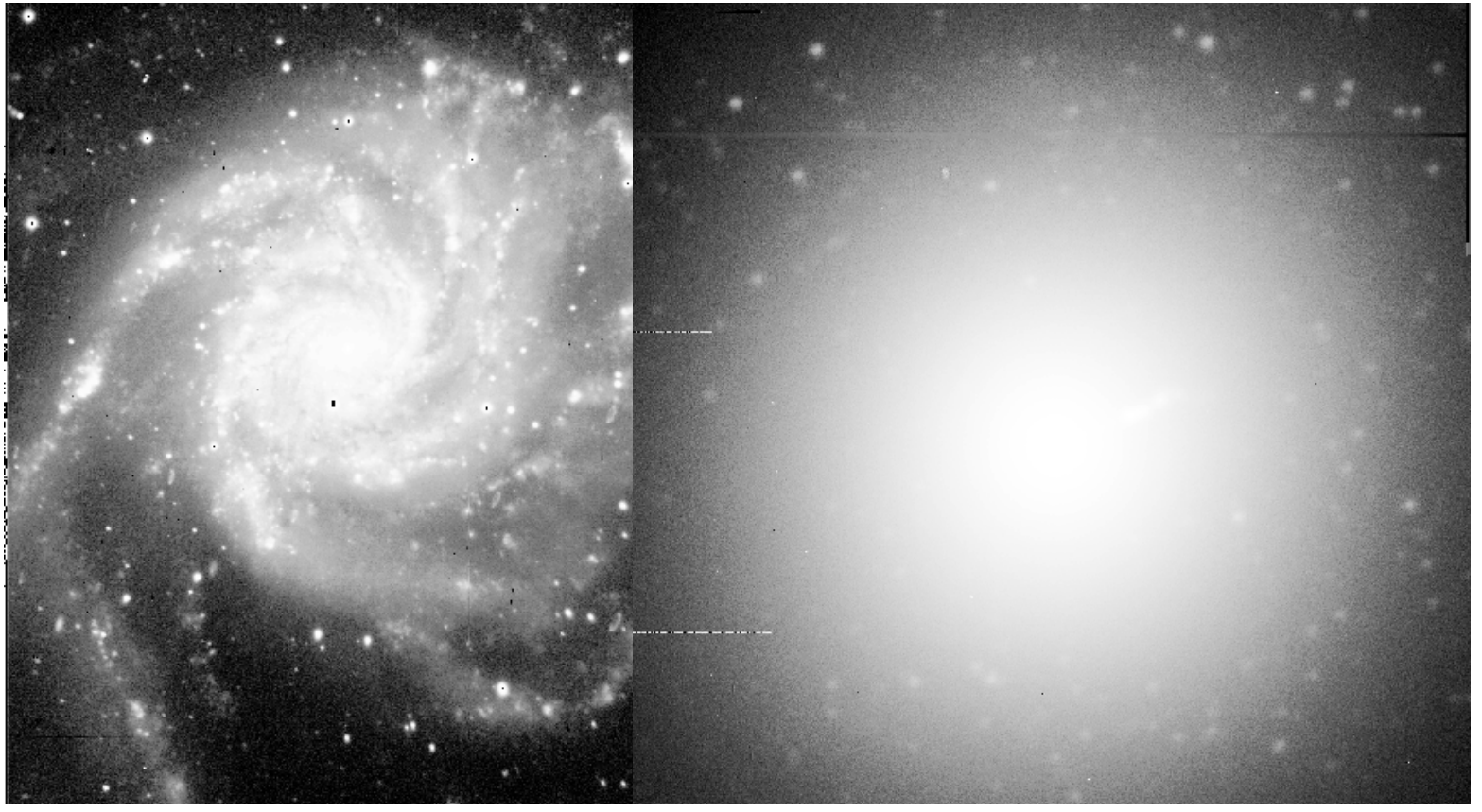
計算の 1 例（教養学部宇宙地球科学教室・福重さん提供）

- やっていることは基本的には宇宙の大規模構造のシミュレーションと同じ。
- 「狭い」領域の計算

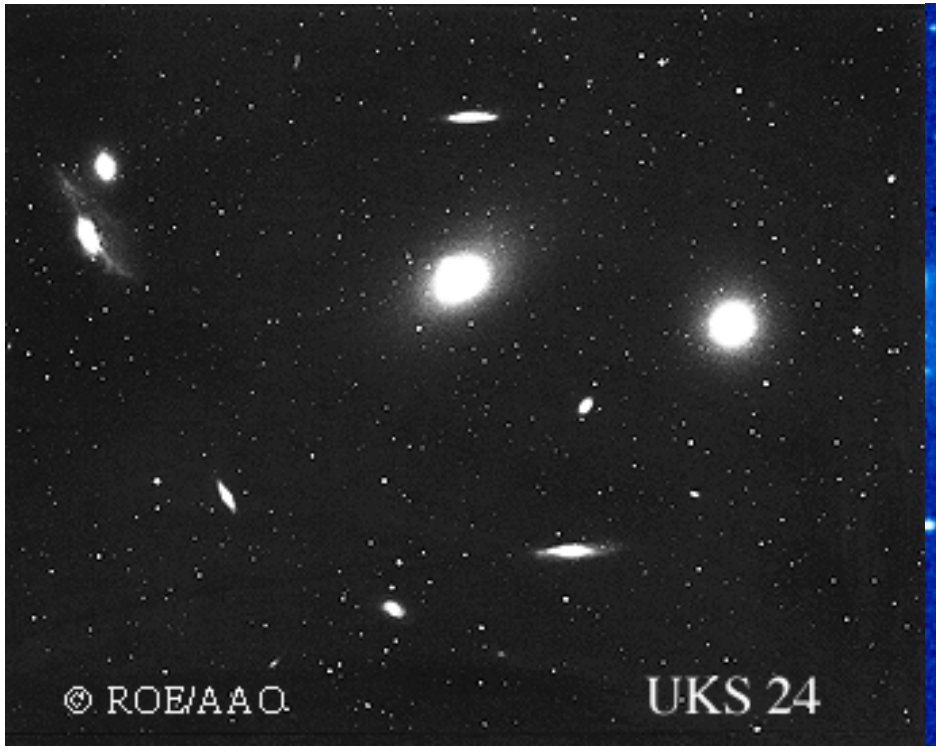
わかること

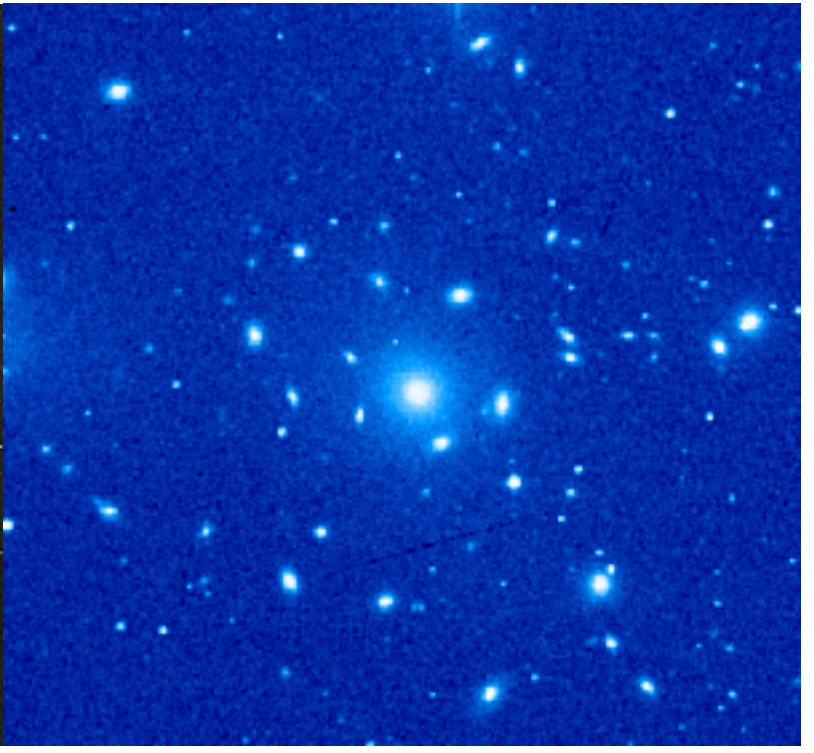
- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

銀河



銀河団





宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、 初めの揺らぎの性質、 ダークマターの性質

Ill-posed problem?

つまり、、、

- 宇宙初期の揺らぎ：(銀河や銀河団になる細かいところまでは）直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか（あるかどうかも）わからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か? という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマターの分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、どういう条件で星ができるかが決まらないと本当には比べられない

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — 2 体問題＋摂動

一般の3体問題：不安定

安定（最終）状態：2体の連星 ＋ もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x,v)$：6 次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x,v)dxdv$ がある「体積」 $dxdv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} f - \boldsymbol{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \tag{7}$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{8}$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \tag{9}$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態にいくのか？

はよくわからない.

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

（但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、）

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間の関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- 1996 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は**間違い** であったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

来週の予定

- 「恒星系力学」の基礎：どうして銀河は潰れてしまわないか
- 銀河中心のブラックホールと、それに関係する話題
- 銀河内星団、特に球状星団の進化
- 惑星形成
- 計算機についての研究等

を紹介したい。