第 8 章　常微分方程式の数値解法：境界値問題

8.1　シューティング法

常微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i[x, y_j(x)] \tag{8.1}$$

$i, j = 1, 2, 3, ..., 2n$ において、$x = x_0$ で

$$g_k[y_j(x_0), x_0] = 0 \tag{8.2}$$

(但し、$k = 1, ..., n$) 且つ $x = x_1$ で

$$g_l[y_j(x_1), x_1] = 0 \tag{8.3}$$

(但し、$l = n + 1, ..., 2n$) を満たすよう解を求める場合を考えよう。境界値問題という訳である。例えば、初期値問題の例に挙げたのと同じ微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{8.4}$$

を、$x = 0$ で $y = 1$, $x = \pi/2$ で $y = 0$ の下で解く境界値問題として考えよう。

与えられた境界から、もう一方の境界に向かって初期値問題として積分する事を考える。決められている条件は、$x = 0$ で $y = 1$ だけだから、初期値問題として積分を進めるためにはもう一つ条件を課す必要がある。そこで、$x = 0$ での dy/dx にある値を与えて積分していくことにする。いろいろと、このパラメーターを変えてみて、もう一方の境界での条件 $x = \pi/2$ で $y = 0$ を満たすようなパラメーターを捜せば良い。シューティング法という。場合によっては、境界条件が特異になっていて、シューティング法ではなかなか当たりが見つからない事がある。この様な場合は、それぞれの境界から、初期値問題として他方の境界に向かって積分していき、ある適当な点 (フィッティングポイント) で、双方の解が接続するようにパラメーターを決める。これをフィッティング法と呼ぶ。

8.1.1　問題

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{8.5}$$

を、$x = 0$ で $y = 1$, $x = \pi/2$ で $y = 1/4$ という境界条件の境界値問題として、シューティング法により、数値的に解け。

$z \equiv dy/dx(x=0)$、$Y \equiv y(x=\pi/2)$ とすると、この問題は $Y(z)=1/4$ となる z を求めることと同じである。手順としては、先ず、適当に選んだ $z_{\rm t}$ に対する Y を求める。次に、z の値を $z_{\rm t}$ から $z_{\rm t}+\delta z$ に変えて、Y の変化量を求める。これから

$$dY/dz = [Y(z_{\rm t}+\delta z) - Y(z_{\rm t})]/\delta z \tag{8.6}$$

を数値的に求める。今、$z_{\rm t}$ の値が、真の解 z_0 から Δz ずれているとすると、1 次の精度で、

$$Y(z_{\rm t}) + (dY/dz)\Delta z = 1/4 \tag{8.7}$$

そこで、

$$z = z_{\rm t} + \Delta z = z_{\rm t} + \{1/4 - Y(z_{\rm t})\}/(dY/dz) \tag{8.8}$$

を改めて $z_{\rm t}$ として、再び dY/dz を計算し、Δz が充分小さくなるまで、逐次計算を繰り返せば良い。

8.2　境界値問題としての Lane-Emden 方程式

Lane-Emden 方程式 (??) を境界値問題として解いてみよう。適当なフィッティングポイント $\xi_{\rm f}$ を設け、中心からフィッティングポイントまでの解は前節で解説した通りの方法で求め、その解に、表面、即ち $\theta(\xi)=0$ となる $\xi=\xi_{\rm s}$ から積分してきた解が、このフィッティングポイントで一致するようにすれば良い。

表面からの積分は $\xi_{\rm s}$ の値を決めた上で行わなければならないのは言うまでもないが、微分方程式は 2 階だから、$\xi=\xi_{\rm s}$ での初期条件が 2 つ必要である。その 1 つは $\theta(\xi)=0$ だが、もう 1 つの $d\theta/d\xi$ は最初はわからない。そこで、$\xi_{\rm s}$ とそこでの $d\theta/d\xi$ の値をパラメーターとして与えてやれば、外側の解をこの 2 つのパラメーターの関数として扱う事が出来る。$y_1=\theta$，$y_2=\xi^2 d\theta/d\xi$ とし、$y_1^{\rm (int)}$ と $y_2^{\rm (int)}$ を中心からの積分で求めた $\xi=\xi_{\rm f}$ での値、$y_1^{\rm (ext)}$ と $y_2^{\rm (ext)}$ を表面からの積分で求めた $\xi=\xi_{\rm f}$ での値としよう。内側の解はユニークに決まっている。一方、外側の解は $x\equiv\xi_{\rm s}$ とそこでの $z\equiv d\theta/d\xi$ の値に依存している。全体の解となるには、$\xi=\xi_{\rm f}$ で

$$Y(x,z) \equiv y_1^{\rm (int)} - y_1^{\rm (ext)}(x,z) = 0 \tag{8.9}$$

$$Z(x,z) \equiv y_2^{\rm (int)} - y_2^{\rm (ext)}(x,z) = 0 \tag{8.10}$$

が満たされなければならない。

手順としては、先ず、適当に選んだ $x_{\rm t}$ と $z_{\rm t}$ に対する Y と Z を求める。次に、z の値を変えずに、x を $x_{\rm t}$ から $x_{\rm t}+\delta x$ に変えて、Y 及び Z の変化量を求める。同様に、x の値を変えずに、z を $z_{\rm t}$ から $z_{\rm t}+\delta z$ に変えて、Y 及び Z の変化量を求める。これから

$$\partial Y/\partial x = [Y(x_{\rm t}+\delta x, z_{\rm t}) - Y(x_{\rm t}, z_{\rm t})]/\delta x \tag{8.11}$$

$$\partial Y/\partial z = [Y(x_{\rm t}, z_{\rm t}+\delta z) - Y(x_{\rm t}, z_{\rm t})]/\delta z \tag{8.12}$$

を数値的に求める。今、$x_{\rm t}$、$z_{\rm t}$ の値が、真の解 x_0，z_0 から Δx，Δz ずれているとすると、1 次の精度で、

$$Y(x_{\rm t}, z_{\rm t}) + (\partial Y/\partial x)\Delta x + (\partial Y/\partial z)\Delta z = 0 \tag{8.13}$$

$$Z(x_{\rm t}, z_{\rm t}) + (\partial Z/\partial x)\Delta x + (\partial Z/\partial z)\Delta z = 0 \tag{8.14}$$

となる。そこで、上の 2 式から Δx と Δz を求め、$x = x_{\rm t} + \Delta x$ を改めて $x_{\rm t}$，$z = z_{\rm t} + \Delta z$ を改めて $z_{\rm t}$ として、Δx，Δz が充分小さくなるまで、逐次計算を繰り返せば良い。

8.2.1 問題

境界値問題として、Lane-Emden 方程式を解け。

8.3 現実的な恒星内部構造モデル

境界値問題の例として、恒星内部を記述する以下の方程式を現実的な仮定の下に解く事を考えよう。基本方程式は、M_r を独立変数に選べば、

1. 静水圧平衡
$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \tag{8.15}$$
2. 連続の式
$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{8.16}$$
3. エネルギー保存式
$$\frac{dL_r}{dM_r} = \varepsilon \tag{8.17}$$
4. エネルギー輸達
$$\frac{dT}{dM_r} = -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 P}\nabla \tag{8.18}$$
但しここに
$$\nabla \equiv \min\left[\frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa L_r P}{M_r T^4}, \nabla_{\rm ad}\right] \tag{8.19}$$

で与えられる。これに、補助的な関係式

1. 状態方程式
$$P = P(\rho, T, X, Y) \tag{8.20}$$
2. 吸収係数
$$\kappa = \kappa(\rho, T, X, Y) \tag{8.21}$$

3. 核反応生成率

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X, Y) \tag{8.22}$$

を考慮する事によって、(8.15) – (8.18) 式は、(P, r, L_r, T) を変数とする四元連立常微分方程式となる。これは境界値問題で、境界条件は星の中心 $M_r = 0$ で

$$r = 0 \tag{8.23}$$

$$L_r = 0 \tag{8.24}$$

星の表面 $Mr = M$ で

$$P = 0 \tag{8.25}$$

$$T = 0 \tag{8.26}$$

である。

8.3.1　恒星内部での輻射輸達

恒星内部で両面の温度が T と $T + dT$ の層を考える。この層に加わるネットの輻射圧を $dP_{\rm rad}$ とする。輻射平衡を考えると、この輻射圧に伴う運動量は物質に吸収される。今単位質量単位断面積当たりの吸収係数を κ とすると、単位面積単位時間当たり $F_{\rm rad}$ の輻射エネルギーが入射して dr 進む間に、$F_{\rm rad}\kappa\rho dr/c$ の運動量が吸収される。従って、

$$-dP_{\rm rad} = F_{\rm rad}\kappa\rho dr/c \tag{8.27}$$

或いは

$$P_{\rm rad} \equiv \frac{a}{3}T^4 \tag{8.28}$$

だから

$$F_{\rm rad} = -\frac{ac}{3\kappa\rho}\frac{dT^4}{dr} \tag{8.29}$$

を得る。

$$L_r \equiv 4\pi r^2 F_{\rm rad} \tag{8.30}$$

として

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-3}{4ac}\frac{\kappa\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{8.31}$$

を得る。

8.3.2 対流によるエネルギー輸送

対流に対する安定性

静水圧平衡にある層で、bubble を 断熱的に dr だけ平衡位置からずらせたとする。最初の平衡位置における bubble の圧力と密度をそれぞれ P_0、ρ_0 とする。これらは周囲の圧力、密度に等しい。dr ずれた周囲の圧力、密度は $P_0 + (dP/dr)dr$、$\rho_0 + (d\rho/dr)dr$ である。ずれた位置での bubble の圧力 P^* はその周囲の圧力に等しい。一方、密度 ρ^* は断熱変化により決まる。即ち

$$\rho^* = \rho_0 (P^*/P_0)^{(1/\gamma)} \tag{8.32}$$

bubble が元の平衡位置に戻るかどうかは ρ^* と周囲の密度の大小による。戻るのが対流安定、どんどんずれていくのが対流不安定である。従って、線形の範囲で、対流不安定の条件は

$$\frac{d\ln\rho}{dr} - \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln P}{dr} > 0 \tag{8.33}$$

対流によるエネルギーフラックス

対流不安定の時、bubble の温度超過分は

$$dT = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}dr - \frac{dT}{dr}dr \tag{8.34}$$

$$\equiv \Delta\nabla T dr \tag{8.35}$$

単位質量当たりの熱エネルギー超過分はこれに $c_p\rho$ を掛けて与えられ、単位面積単位時間当たりのエネルギーフラックスは更に速度を掛けたものである。

$$F_{\rm conv} = \Delta\nabla T dr c_p \rho v \tag{8.36}$$

同様に密度超過分は

$$d\rho = \frac{\rho}{T}\Delta\nabla T dr \tag{8.37}$$

で与えられるが、移動によってなされる平均仕事量はこれに重力加速度と移動距離を掛けた上で平均したものである。これが運動エネルギーの元であるから、

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{\rho}{T}\Delta\nabla T dr \frac{GM_r}{r^2}\frac{1}{2}dr \tag{8.38}$$

が成り立つ。dr として、対流で混ざる代表的長さ l を採ると、エネルギーフラックスは

$$F_{\rm conv} = c_p\rho\left(\frac{GM_r}{Tr^2}\right)^{1/2}(\Delta\nabla T)^{3/2}\frac{l^2}{4} \tag{8.39}$$

で与えられる。

対流温度勾配

対流核の場合、温度超過は温度勾配に比べて無視出来るほど小さい。そこで温度勾配は、

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \tag{8.40}$$

で与えられる。

8.3.3　おおよその値

微分方程式を解く前に、解のおおよその値に目星をつけよう。基本方程式において、左辺の微分、例えば dP/dM_r を単なる割り算 P/M_r に置き換える。そのうえで $M_r \sim M/2$、$r \sim R/2$、$\rho \sim \rho_{\rm c}$、$T \sim T_{\rm c}$、$P \sim P_{\rm c}$ として恒星の物理諸量の大雑把な値を求めよ。

1. 静水圧平衡

$$\frac{P_{\rm c}}{M} \sim -\frac{GM/2}{4\pi(R/2)^4} \tag{8.41}$$

これより

$$P_{\rm c} \sim \frac{2}{\pi}\frac{GM^2}{R^4} \tag{8.42}$$

2. 連続の式

$$\frac{R}{M} \sim \frac{1}{4\pi(R/2)^2(\rho_{\rm c}/2)} \tag{8.43}$$

これより

$$\rho_{\rm c} \sim \frac{2}{\pi}\frac{M}{R^3} \tag{8.44}$$

3. 状態方程式

ガス圧が主である場合を想定すると

$$P_{\rm c} \sim \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_{\rm c}T_{\rm c} \tag{8.45}$$

これより

$$\begin{aligned} T_{\rm c} &\sim \frac{1}{\mathcal{R}/\mu}\frac{P_{\rm c}}{\rho_{\rm c}} \\ &\sim \frac{1}{\mathcal{R}/\mu}\frac{GM}{R} \end{aligned} \tag{8.46}$$

ただし $G = 6.6726 \times 10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}$。

4. エネルギー輸達

エネルギーは輻射によって運ばれていると想定すると

$$\frac{T_{\rm c}}{M} \sim -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\bar{\kappa}L/2}{(T_{\rm c}/2)^3(R/2)^4} \tag{8.47}$$

これより

$$\begin{aligned} L &\sim \frac{\pi^2 ac}{3\bar{\kappa}} \frac{T_{\rm c}^4 R^4}{M} \\ &\sim \frac{\pi^2}{3\bar{\kappa}} \frac{acG^4}{(\mathcal{R}/\mu)^4} M^3 \end{aligned} \tag{8.48}$$

今、太陽を想定して $M = M_\odot \sim 2 \times 10^{30}\mathrm{kg}$、$R = R_\odot \sim 7 \times 10^8\mathrm{m}$、$\mathcal{R}/\mu \sim 1.7 \times 10^8$ を代入すると

$$T_{\rm c} \sim 10^7 \quad \mathrm{K} \tag{8.49}$$

$$P_{\rm c} \sim 10^{15} \quad \mathrm{Pa} \tag{8.50}$$

$$\rho_{\rm c} \sim 4 \times 10^4 \quad \mathrm{kg \cdot m^{-3}} \tag{8.51}$$

を得る。光度については、

$$\bar{\kappa} \sim \kappa_0 Z(1+X) \frac{\rho_{\rm c}/2}{(T_{\rm c}/2)^{3.5}} \sim 8 \times 10^3 \quad \mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}} \tag{8.52}$$

だから

$$\begin{aligned} L &\sim 10^{24} \quad \mathrm{J \cdot s{-}1} \\ &= 10^{24} \quad \mathrm{W} \end{aligned} \tag{8.53}$$

を得る。

8.3.4 HR 図と主系列

$$\bar{\kappa} L \sim \frac{\pi^2}{6} \frac{acG^4}{(\mathcal{R}/\mu)^4} M^3 \tag{8.54}$$

$$\frac{\bar{\kappa} L}{\bar{\kappa} L_\odot} \sim \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \tag{8.55}$$

$$\sigma T_{\rm eff}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \tag{8.56}$$

$$\left(\frac{T_{\rm eff}}{T_{\rm eff,\odot}} \right)^4 = \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-2} \sim \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \sim \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{1/3} \tag{8.57}$$

8.3.5　輻射圧と臨界光度

輻射圧 $P_{\rm rad}$ は

$$P_{\rm rad} = \frac{a}{3}T^4 \tag{8.58}$$

で与えられる。恒星の内部ではガス圧の他にこの輻射圧が無視できない。温度の依存性がガス圧に比べて高いので、低密度高温状態ではむしろ輻射圧が主たる圧力になる。輻射圧の変化は輻射輸達の方程式から

$$\frac{dP_{\rm rad}}{dM_r} = -\frac{1}{16\pi^2 c}\frac{\kappa L_r}{r^4} \tag{8.59}$$

これから

$$\begin{aligned} L_r &= -\frac{16\pi^2 c r^4}{\kappa}\frac{dP_{\rm rad}}{dM_r} \\ &= -\frac{16\pi^2 c r^4}{\kappa}(1-\beta)\frac{dP}{dM_r} \\ &= \frac{4\pi c G M_r}{\kappa}(1-\beta) \end{aligned} \tag{8.60}$$

これにより、輻射光度には或る上限値がある事が判る。即ち、

$$L \le L_{\rm crit} \equiv \frac{4\pi c G M_r}{\kappa} \tag{8.61}$$

等号は $\beta = 0$ で成立するが、$\beta = 0$ の場合は輻射圧だけで支える極限の場合である。

8.3.6　質量光度関係

星の光度は質量の何乗ぐらいで変わっているだろうか？ 星の質量と光度の関係を導いてみよう。臨界光度に近い高温大質量星の場合、$1-\beta \simeq 1$ ゆえ

$$L \sim \left(\frac{L_{\rm crit}}{M}\right) M \tag{8.62}$$

となり、光度は星の質量の 1 乗に比例する。

一方ガス圧が主になる中質量星、低質量星では、前に導いたように、

$$L \sim \frac{2\pi^2}{3}\frac{acG^4}{(\mathcal{R}/\mu)^4}\frac{M^3}{\kappa} \tag{8.63}$$

となり、吸収係数に依存する。中質量星の場合には吸収係数としては電子散乱が主たる寄与をしており、κ は 温度によらない。従って、光度は星の質量の 3 乗に比例する。一方、低質量星では 吸収係数へは Kramers の項の寄与が大きい。そこで

$$\begin{aligned} \kappa &\sim \rho T^{-3.5} \\ &\sim \frac{M}{R^3}\left(\frac{M}{R}\right)^{-3.5} \\ &\sim M^{-2.5} R^{0.5} \end{aligned} \tag{8.64}$$

よって

$$L \propto R^{-0.5} M^{5.5} \tag{8.65}$$

となり、光度は星の質量の 5.5 乗に比例する。

8.3.7 現実的な恒星内部構造の解法の方針

恒星内部を記述する 4 本の微分方程式を、中心及び表面でのそれぞれ 2 本ずつ計 4 本の境界条件とともに、数値的に解く。中心と表面からそれぞれ数値積分をはじめ、ある適当な所で両者がフィットするようにする。星の中心から外に向かって積分していくとしたら二つの物理量 $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ がパラメーターとして残る。星の表面から内に向かって積分していくとしたら二つの物理量 R, L がパラメーターとして残る。解がフィットするようなパラメーター $(P_{\rm c}, T_{\rm c}, R, L)$ を捜す事になる。

星としては $2 - 15\ M_\odot$ の主系列星を考えることにしよう。そこで状態方程式としては理想気体と輻射を考えて

$$\begin{aligned} P &= P_{\rm gas} + P_{\rm rad} \\ &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T + \frac{a}{3}T^4 \end{aligned} \tag{8.66}$$

ここに μ は

$$\mu^{-1} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \tag{8.67}$$

で、平均分子量。また $\mathcal{R} \equiv k/m_{\rm H}$ で、a は

$$a = 7.565 \times 10^{-16} \quad {\rm J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}} \tag{8.68}$$

で radiation constant。吸収係数としては Kramers + 電子散乱 を考え

$$\kappa = \kappa_0 Z(1+X)\rho T^{-3.5} + 0.019(1+X) \tag{8.69}$$

$$\kappa_0 = 4.34 \times 10^{24} \quad {\rm m^2 \cdot kg^{-1}} \tag{8.70}$$

とする。核反応生成率は CNO-cycle を考え

$$\varepsilon_{\rm CNO} = \varepsilon_0 \rho X X_{\rm CNO} T^{16} \tag{8.71}$$

$$\varepsilon_0 = 8 \times 10^{-118} \quad {\rm W \cdot kg^{-1}} \tag{8.72}$$

とする。

8.3.8 ステップ 1 : 中心からの積分

$M = 3M_\odot$、$M = 5M_\odot$、$M = 7M_\odot$、$M = 10M_\odot$ の星の Zero-Age Main-Sequence 時のモデルを計算してみよう。星が Zero-Age Main-Sequence に達した時は、それに先立つ林-フェーズにおけ

る星全体に及ぶ対流の結果、化学組成は一様になっていると考えられる。そこで化学組成一様な星のモデルを計算する。$X = 0.75$, $Z = 0.02$ としよう。最初のステップとして中心からの積分を行う。二つの物理量 $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ がパラメーターとして残る。積分は Runge-Kutta 法で行う。中心近傍での物理量は

$$M_r \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_{\rm c} r^3 \tag{8.73}$$

$$P \simeq P_{\rm c} - \frac{2\pi}{3} G\rho_{\rm c}^2 r^2 \tag{8.74}$$

$$L_r \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_{\rm c} r^3 \varepsilon_{\rm c} \tag{8.75}$$

$$T \simeq \begin{cases} T_{\rm c} - \frac{\kappa_{\rm c}\varepsilon_{\rm c}\rho_{\rm c}^2}{8acT_{\rm c}^3} r^2 & \text{if radiative} \\ T_{\rm c} - \frac{2\pi}{3} G \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T_{\rm c}}{P_{\rm c}} \rho_{\rm c}^2 r^2 & \text{if convective} \end{cases} \tag{8.76}$$

パラメーター $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ の現実的な値としては、前回計算を行ったポリトロープ球から得られる値を用いると良いだろう。(後で行う表面からの積分の解と fitting point で解がフィットするようなパラメーターを捜さなければならないので、パラメーターを任意に変えられるようなプログラムを書く必要がある[1] 。)

8.3.9　問題：中心近傍での解の振舞

中心近傍での解の振舞を議論せよ。

8.3.10　ステップ 2 ：表面からの積分

次のステップとして表面からの積分を行う。二つの物理量 (L, R) がパラメーターとして残る。独立変数として M_r を用いるのが良いだろう。積分は 前回同様 Runge-Kutta 法で行う。

今考えているような $M = 3M_\odot$、$M = 5M_\odot$、$M = 7M_\odot$、$M = 10M_\odot$ の星では、エネルギーは中心近傍では対流で運ばれ、外側では輻射で運ばれる。そこで radiative envelope を考える。すると

$$\frac{dP}{dT} = \frac{16\pi acGM_r}{3L_r}\frac{T^3}{\kappa} \tag{8.77}$$

だが、表面近傍では $M_r \simeq M$ $L_r = L$ なので、上の式は

$$\frac{dP}{dT} \simeq \frac{16\pi acGM}{3L}\frac{T^3}{\kappa} \tag{8.78}$$

となる。ここで opacity を

$$\kappa = \tilde{\kappa_0} P^\alpha T^\gamma \tag{8.79}$$

[1] サンプルプログラムとして、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/core.for を挙げておく。

とすると、上の式は更に

$$P^{\alpha}dP = \frac{A}{\tilde{\kappa_0}}T^{3-\gamma}dT \tag{8.80}$$

となるから、この式を積分して

$$P^{1+\alpha} - P_{\rm e}^{1+\alpha} = \frac{A}{\tilde{\kappa_0}}\frac{1+\alpha}{4-\gamma}(T^{4-\gamma} - T_{\rm e}^{4-\gamma}) \tag{8.81}$$

を得る。但し、ここで

$$A \equiv \frac{16\pi acGM}{3L} \tag{8.82}$$

であり、P、T の表面での値をそれぞれ $P_{\rm e}$、$T_{\rm e}$ とした。もし $1+\alpha > 0$ 且つ $4-\gamma > 0$ であれば、上記 P-T 関係は表面での値 $P_{\rm e}$、$T_{\rm e}$ に殆ど依存しなくなる。実際 Kramers' opacity では $\alpha = 1$、$\gamma = -4.5$ でこの条件を満たす。そこで、ここでは、星の表面 $(M_r = M)$ では $P = 0$、 $T = 0$ とする。Kramers' opacity を採用すると、

$$P \sim \sqrt{\frac{1}{4.25}\frac{A}{\tilde{\kappa_0}}}T^{4.25} \tag{8.83}$$

となる。そこで表面領域では解くべき方程式は

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \tag{8.84}$$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{\mathcal{R}T}{4\pi r^2 \mu P} \tag{8.85}$$

$$\frac{dL_r}{dM_r} = 0 \tag{8.86}$$

$$\frac{dT}{dM_r} = -\frac{3\kappa_0\mu}{64\pi^2 ac\mathcal{R}}Z(1+X)LT^{-7.5}PR^{-4} \tag{8.87}$$

となる。これらを $M_r = M$ から内側に積分していく。初期値として、$M_r = M$ で $P = T = 0$。そこでの L 及び $r(\equiv R)$ が二つの自由パラメーターになる。

パラメーター (L, R) の現実的な値としては、ポリトロープ球から得られる値を用いると良いだろう。(いずれにせよ、前回行った中心からの積分の解と fitting point で解がフィットするようなパラメーターを捜さなければならないので、パラメーターを任意に変えられるようなプログラムを書く必要がある[2] 。)

8.3.11 問題：表面近傍の温度構造

表面近傍では温度は

$$T \simeq \frac{1}{4.25}\frac{\mu}{\mathcal{R}}GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{8.88}$$

で良く近似できる事を導け。

[2] サンプルプログラムとして、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/envelope.for を挙げておく。

8.3.12　ステップ 3 ：中心からの積分と表面からの積分のフィッティング

中心と表面からそれぞれ数値積分をはじめ、ある適当な所で両者がフィットするようにする。中心からの積分は二つの物理量 $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ をパラメーターとして行った。この時、ある適当なフィッティングポイント (例えば $M_r = 0.7M$) での 4 変数の値 (これらを $T_{\rm i}$, $P_{\rm i}$, $r_{\rm i}$, $L_{\rm i}$ と記そう。) は $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$ の関数になっている。

$$T_{\rm i} = T_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.89}$$

$$P_{\rm i} = P_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.90}$$

$$r_{\rm i} = r_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.91}$$

$$L_{\rm i} = L_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) \tag{8.92}$$

同様にして、ある適当なフィッティングポイント (例えば $M_r = 0.7M$) での表面から積分してきた 4 変数 (これらを $T_{\rm e}$, $P_{\rm e}$, $r_{\rm e}$, $L_{\rm e}$ と記そう。) の値は (L, R) の関数になっている。

$$T_{\rm e} = T_{\rm e}(L, R) \tag{8.93}$$

$$P_{\rm e} = P_{\rm e}(L, R) \tag{8.94}$$

$$r_{\rm e} = r_{\rm e}(L, R) \tag{8.95}$$

$$L_{\rm e} = L_{\rm e}(L, R) \tag{8.96}$$

両者が一致する必要が条件は

$$T_{\rm i} = T_{\rm e} \tag{8.97}$$

$$P_{\rm i} = P_{\rm e} \tag{8.98}$$

$$r_{\rm i} = r_{\rm e} \tag{8.99}$$

$$L_{\rm i} = L_{\rm e} \tag{8.100}$$

だが、任意に選んだ $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) に対してはこの条件は満たされない。この条件を満たす $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) を $(\bar{P_{\rm c}}, \bar{T_{\rm c}})$, $(\bar{L}, \bar{R})$ とし、その時のフィティングポイントでの (T, P, r, L) の値を $(\bar{T}, \bar{P}, \bar{r}, \bar{L})$ とし、前に用いた $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) との差を δ で表わすことにする。今、前に用いた $(P_{\rm c}, T_{\rm c})$, (L, R) がかなり $(\bar{P_{\rm c}}, \bar{T_{\rm c}})$, $(\bar{L}, \bar{R})$ に近いとすると、フィティングの条件は、δ の一次の範囲では

$$T_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial T_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial T_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = T_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial T_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial T_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.101}$$

$$P_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial P_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial P_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = P_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial P_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial P_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.102}$$

$$r_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial r_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial r_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = r_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial r_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial r_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.103}$$

$$L_{\rm i}(P_{\rm c}, T_{\rm c}) + \frac{\partial L_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}\delta P_{\rm c} + \frac{\partial L_{\rm i}}{\partial T_{\rm c}}\delta T_{\rm c} = L_{\rm e}(L, R) + \frac{\partial L_{\rm e}}{\partial L}\delta L + \frac{\partial L_{\rm e}}{\partial R}\delta R \tag{8.104}$$

となる。ここで微分係数 $\frac{\partial T_{\rm i}}{\partial P_{\rm c}}$ などは、フィティングポイントでの $T_{\rm i}$ の値のパラメーター $P_{\rm c}$ に対する依存性で、これらは数値的に調べる事が出来る。従って、上の 4 本の式は、$(\delta P_{\rm c}, \delta T_{\rm c}, \delta L, \delta R)$ を 4 つの未知変数とする代数方程式と見做す事が出来る[3] 。

これを解いて最初に用いたパラメーター $(P_{\rm c}, T_{\rm c}, L, R)$ に対する補正量 $(\delta P_{\rm c}, \delta T_{\rm c}, \delta L, \delta R)$ を求める。このプロセスを繰り返し、収束するまで行えばフィティングする解が求められた事になる。

8.4 Henyey 法

星の内部構造を解く問題は、非線形の境界値問題であることを既に述べた。主系列近傍の恒星の内部構造は、フィッティング法で解けた。1960 年代に恒星進化の理論は、主系列から赤色巨星への進化を追うようになったが、赤色巨星になると、表面での境界値に対する依存性が鈍くなって、フィッティング法では上手く解くことが出来なくなっていた。こういった状況をブレークしたのは、カリフォルニア大学の Henyey であった。彼は、一種の relaxation method で代数方程式を解くことに成功したのである[4] 。この方法は、一般の 2 点境界値問題に適用出来る方法で、天文学の社会では、Henyey 法と呼ばれている。以下に、この Henyey 法を解説しよう[5] 。

問題とする微分方程式を

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_j) \qquad i, j = 1, \cdots, 4 \tag{8.105}$$

とする。独立変数 x の領域を N メッシュに切って、微分方程式を差分方程式に書き換え、これを数値的に解くことを考える。元の微分方程式を 4 階の微分方程式だとすると、計 $4(N-1)$ 本の差分方程式となる。これらは 4 つの変数 y_i $(i = 1, \cdots, 4)$ の N 個のメッシュそれぞれでの値、合計 $4N$ 個の未知数、$y_i(x_n)$、の代数方程式と見なすことができる。未知数の数と方程式の数が合わない？このままでは、その通り。しかし、境界条件があることをお忘れなく。内側の境界に境界条件が 2 本、外側の境界にも 2 本、合計 4 本の境界条件の式があるので、方程式の数は合計 $4N$ 本になって、未知数の数と同じになり、代数方程式は原理的に解けるのである。ただ、これは「原理的に」である。この方程式が非線形であれば、そのまま解くのが容易でないのは明らかであり、線形であったとしても、実際に数値的に解けるかどうかは、N による。実際的には、$N = 1000$ とすると、4000 元の代数方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8.106}$$

を解かねばならないことになり、これを直接、4000×4000 の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算して

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{8.107}$$

とするのは、実際的ではない。4000×4000 もの大行列の逆行列を求めるのが困難だからである。

従属変数 y_i の $x = x_n$ での値であることを表わすのに、上付き添え字 n をつけて y_i^n で表わすことにする：

$$y_i^n = y_i(x_n). \tag{8.108}$$

[3] サンプルプログラムとして、http://www.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~shibahas/dinv.for を挙げておく。
[4] Henyey, L. G., Forbes, J. E. and Gould, N. L. 1964, ApJ, 139, 164
[5] 参考書として、Kippenhahn, R., Weigert, A. and Hoffmeister, E. 1967, in Methods in Computational Physics, ed. B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg (Academic Press, New York), p. 129 を挙げておこう。

微分を差分に置き換えると、(8.105) 式は

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\Delta x}=\frac{1}{2}[f_i(y_j^{n+1})+f_i(y_j^n)];\quad i,j=1,\cdots,4;\quad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{8.109}$$

となる。但し、

$$\Delta x=x_{n+1}-x_n;\quad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{8.110}$$

である。中心と表面での境界条件を、それぞれ、

$$g_l(y_j^1)=0;\quad l=1,2;\quad j=1,\cdots,4 \tag{8.111}$$

と

$$g_l(y_j^N)=0;\quad l=3,4;\quad j=1,\cdots,4 \tag{8.112}$$

としよう。

8.4.1　線形化

このままでは、方程式系は非線形である。推定値からのずれを取り扱うことにして、問題を線形化しよう。即ち、真の解 y_i についての推定値を $\bar{y}_i$ として、真の値からのずれを δy_i とする：

$$y_i^n=\bar{y}_i^n+\delta y_i^n;\quad i=1,\cdots,4;\quad n=1,2,\cdots,N. \tag{8.113}$$

(8.113) 式を (8.109), (8.111), 及び (8.112) 式に代入して、δy_i^n の 2 次以上の項を無視すると、次の $4N$ 本の式を得る：

$$\bar{y}_i^{n+1}+\delta y_i^{n+1}-\bar{y}_i^n-\delta y_i^n=\frac{\Delta x}{2}\left[f_i(\bar{y}_j^{n+1})+\sum_{j=1}^4\frac{\partial f_i(\bar{y}_j^{n+1})}{\partial \bar{y}_j^{n+1}}+f_i(\bar{y}_j^n)+\sum_{j=1}^4\frac{\partial f_i(\bar{y}_j^n)}{\partial \bar{y}_j^n}\right];\quad i=1,\cdots,4, \tag{8.114}$$

$$g_l(\bar{y}_j^1)+\sum_{j=1}^4\frac{\partial g_l(\bar{y}_j^1)}{\partial \bar{y}_j^1}=0;\quad l=1,2, \tag{8.115}$$

$$g_l(\bar{y}_j^N)+\sum_{j=1}^4\frac{\partial g_l(\bar{y}_j^N)}{\partial \bar{y}_j^N}=0;\quad l=3,4. \tag{8.116}$$

整理すると、

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij}^n\delta y_j^n+\sum_{j=1}^4 B_{ij}^n\delta y_j^{n+1}+d_i^n=0;\quad i=1,\cdots,4;\quad n=1,2,\cdots,N-1, \tag{8.117}$$

$$\sum_{j=1}^4 G_{lj}^1\delta y_j^1+\bar{g}_l^1=0;\quad l=1,2, \tag{8.118}$$

それに

$$\sum_{j=1}^{4} G_{lj}^N \delta y_j^N + \bar{g}_l^N = 0; \quad l = 3, 4, \tag{8.119}$$

但し、ここに

$$A_{ij}^n = \frac{\Delta x^n}{2} F_{ij}^n + \delta_{ij}, \tag{8.120}$$

$$B_{ij}^n = \frac{\Delta x^n}{2} F_{ij}^{n+1} - \delta_{ij}, \tag{8.121}$$

$$\bar{d}_i^n = -(\bar{y}_i^{n+1} - \bar{y}_i^n) + \frac{\Delta x}{2}[\bar{f}_i^{n+1} + \bar{f}_i^n] \tag{8.122}$$

であり、δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す。また、

$$\bar{f}_i^n \equiv f_i(\bar{y}_j^n); \quad i, j = 1, \cdots, 4; \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{8.123}$$

$$\bar{g}_l^1 \equiv g_l(\bar{y}_j^1); \quad l = 1, 2; \quad j = 1, \cdots, 4, \tag{8.124}$$

$$\bar{g}_l^N \equiv g_l(\bar{y}_j^N); \quad l = 3, 4; \quad j = 1, \cdots, 4, \tag{8.125}$$

$$F_{ij}^n = \frac{\partial \bar{f}_i^n}{\partial \bar{y}_j^n}; \quad i, j = 1, \cdots, 4; \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{8.126}$$

$$G_{lj}^1 = \frac{\partial \bar{g}_l^1}{\partial \bar{y}_j^1}; \quad l = 1, 2; \quad i = 1, \cdots, 4, \tag{8.127}$$

$$G_{lj}^N = \frac{\partial \bar{g}_l^N}{\partial \bar{y}_j^N}; \quad l = 3, 4; \quad i = 1, \cdots, 4 \tag{8.128}$$

で定義する。

8.4.2 係数行列は帯行列

方程式 (8.117)–(8.119) は、$4N$ 個の未知変数 δy_i^n に関する線形方程式である。一見したところ、この方程式系は大行列を要し、解くことが出来ないと思えるかも知れない。しかし、係数行列の要素の多くはゼロである。実際、$\boldsymbol{A}_n \equiv \{A_{ij}^n\}$、$\boldsymbol{B}_n \equiv \{B_{ij}^n\}$、$\boldsymbol{G}_1 \equiv \{G_{lj}^1\}$、$\boldsymbol{G}_N \equiv \{G_{lj}^N\}$、$\boldsymbol{\delta y}_n \equiv \{\delta y_i^n\}$ 等と記して、方程式 (8.117)–(8.119) を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}_{N-1} & \boldsymbol{B}_{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boldsymbol{G}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta y}_1 \\ \boldsymbol{\delta y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta y}_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{g}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{d}}_{N-1} \\ \bar{\boldsymbol{g}}_N \end{pmatrix} \tag{8.129}$$

になり、左辺の $4N \times 4N$ の係数行列の対角帯以外はゼロである。Henyey 法は、この特質を有効に利用するのである。

8.4.3　帯行列を区分化して解く：漸化式

まず、2 本の中心での境界条件の式 (8.118) と、最初の差分方程式 (8.117) のうちから 2 本 ($i = 1, 2$) をセットにして考える。この 4 本の式は次の様に表される：

$$(\boldsymbol{P}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^1\\ \delta y_2^1\\ \delta y_3^1\\ \delta y_4^1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{Q}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^2\\ \delta y_2^2\\ \delta y_3^2\\ \delta y_4^2\end{pmatrix} + (\boldsymbol{q}_1). \tag{8.130}$$

ここに

$$(\boldsymbol{P}_1) = \begin{pmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 & G_{14}^1\\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 & G_{24}^1\\ A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{14}^1\\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & A_{24}^1\end{pmatrix}, \tag{8.131}$$

$$(\boldsymbol{Q}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -B_{11}^1 & -B_{12}^1 & -B_{13}^1 & -B_{14}^1\\ -B_{21}^2 & -B_{22}^2 & -B_{23}^2 & -B_{24}^2\end{pmatrix}, \tag{8.132}$$

$$(\boldsymbol{q}_1) = \begin{pmatrix} -\bar{g}_1^1\\ -\bar{g}_2^1\\ -\bar{d}_1^1\\ -\bar{d}_2^1\end{pmatrix} \tag{8.133}$$

である。この 4 本の方程式は、8 個の未知変数 δy_i^1、δy_i^2 $(i = 1, \cdots, 4)$ を含むから、4 個の変数は、残り 4 個の変数の線形従属として表すことが出来る。即ち、

$$\begin{pmatrix}\delta y_1^1\\ \delta y_2^1\\ \delta y_3^1\\ \delta y_4^1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{R}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^2\\ \delta y_2^2\\ \delta y_3^2\\ \delta y_4^2\end{pmatrix} + (\boldsymbol{r}_1), \tag{8.134}$$

但し、ここに

$$(\boldsymbol{R}_1) = (\boldsymbol{P}_1)^{-1}(\boldsymbol{Q}_1), \tag{8.135}$$

$$(\boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{P}_1)^{-1}(\boldsymbol{q}_1) \tag{8.136}$$

であり、$(\boldsymbol{P}_1)^{-1}$ は $(\boldsymbol{P}_1)$ の逆行列を表す。(8.134) 式は、一旦 $\boldsymbol{\delta y}_2$ が求まれば、$\boldsymbol{\delta y}_1$ が求められることを意味している。

次に、$n = 1$ の (8.117) 式の残りの 2 本 $(i = 3, 4)$ と、$n = 2$ の (8.117) 式の最初の 2 本 $(i = 1, 2)$ のセットを考える。このセットは

$$(\boldsymbol{S}_1)\begin{pmatrix}\delta y_1^1\\ \delta y_2^1\\ \delta y_3^1\\ \delta y_4^1\end{pmatrix} + (\boldsymbol{P}_2)\begin{pmatrix}\delta y_1^2\\ \delta y_2^2\\ \delta y_3^2\\ \delta y_4^2\end{pmatrix} = (\boldsymbol{Q}_2)\begin{pmatrix}\delta y_1^3\\ \delta y_2^3\\ \delta y_3^3\\ \delta y_4^3\end{pmatrix} + (\boldsymbol{q}_2), \tag{8.137}$$

と表される。但し、ここで

$$(\boldsymbol{S}_1) = \begin{pmatrix} A^1_{31} & A^1_{32} & A^1_{33} & A^1_{34} \\ A^2_{41} & A^2_{42} & A^2_{43} & A^2_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.138}$$

$$(\boldsymbol{P}_2) = \begin{pmatrix} B^1_{31} & B^1_{32} & B^1_{33} & B^1_{34} \\ B^1_{41} & B^1_{42} & B^1_{43} & B^1_{44} \\ A^2_{11} & A^2_{12} & A^2_{13} & A^2_{14} \\ A^2_{21} & A^2_{22} & A^2_{23} & A^2_{24} \end{pmatrix}, \tag{8.139}$$

$$(\boldsymbol{Q}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B^2_{11} & -B^2_{12} & -B^2_{13} & -B^2_{14} \\ -B^2_{21} & -B^2_{22} & -B^2_{23} & -B^2_{24} \end{pmatrix}, \tag{8.140}$$

それに

$$(\boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix} -\bar{d}^1_3 \\ -\bar{d}^1_4 \\ -\bar{d}^2_1 \\ -\bar{d}^2_2 \end{pmatrix} \tag{8.141}$$

である。(8.134) 式を (8.137) 式に代入して、

$$\begin{pmatrix} \delta y^2_1 \\ \delta y^2_2 \\ \delta y^2_3 \\ \delta y^2_4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{R}_2) \begin{pmatrix} \delta y^3_1 \\ \delta y^3_2 \\ \delta y^3_3 \\ \delta y^3_4 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{r}_2), \tag{8.142}$$

を得る。但し、ここで、行列 $(\boldsymbol{R}_2)$ と $(\boldsymbol{r}_2)$ は

$$(\boldsymbol{R}_2) = \left[(\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{R}_1) + (\boldsymbol{P}_2)\right]^{-1} (\boldsymbol{Q}_2), \tag{8.143}$$

$$(\boldsymbol{r}_2) = \left[(\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{R}_1) + (\boldsymbol{P}_2)\right]^{-1} \left[(\boldsymbol{q}_2) - (\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{r}_1)\right] \tag{8.144}$$

で定義する。

(8.142) 式は

$$\begin{pmatrix} \delta y^n_1 \\ \delta y^n_2 \\ \delta y^n_3 \\ \delta y^n_4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{R}_n) \begin{pmatrix} \delta y^{n+1}_1 \\ \delta y^{n+1}_2 \\ \delta y^{n+1}_3 \\ \delta y^{n+1}_4 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{r}_n); \quad n = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{8.145}$$

と一般化した漸化式に書くことが出来る。但し、

$$(\boldsymbol{R}_n) = \left[(\boldsymbol{S}_{n-1})(\boldsymbol{R}_{n-1}) + (\boldsymbol{P}_n)\right]^{-1} (\boldsymbol{Q}_n), \tag{8.146}$$

$$(\boldsymbol{r}_n) = \left[(\boldsymbol{S}_{n-1})(\boldsymbol{R}_{n-1}) + (\boldsymbol{P}_n)\right]^{-1} \left[(\boldsymbol{q}_n) - (\boldsymbol{S}_{n-1})(\boldsymbol{r}_{n-1})\right], \tag{8.147}$$

であり、

$$(\boldsymbol{S}_{n-1}) = \begin{pmatrix} A_{31}^{n-1} & A_{32}^{n-1} & A_{33}^{n-1} & A_{34}^{n-1} \\ A_{41}^{n-1} & A_{42}^{n-1} & A_{43}^{n-1} & A_{44}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.148}$$

$$(\boldsymbol{P}_n) = \begin{pmatrix} B_{31}^{n-1} & B_{32}^{n-1} & B_{33}^{n-1} & B_{34}^{n-1} \\ B_{41}^{n-1} & B_{42}^{n-1} & B_{43}^{n-1} & B_{44}^{n-1} \\ A_{11}^{n} & A_{12}^{n} & A_{13}^{n} & A_{14}^{n} \\ A_{21}^{n} & A_{22}^{n} & A_{23}^{n} & A_{24}^{n} \end{pmatrix}, \tag{8.149}$$

$$(\boldsymbol{Q}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{11}^{n} & -B_{12}^{n} & -B_{13}^{n} & -B_{14}^{n} \\ -B_{21}^{n} & -B_{22}^{n} & -B_{23}^{n} & -B_{24}^{n} \end{pmatrix}, \tag{8.150}$$

それに

$$(\boldsymbol{q}_n) = \begin{pmatrix} -\bar{d}_3^{n-1} \\ -\bar{d}_4^{n-1} \\ -\bar{d}_1^{n} \\ -\bar{d}_2^{n} \end{pmatrix} \tag{8.151}$$

である。

8.4.4　帯行列を区分化して解く：後退代入

(8.145) 式は、一旦 $\boldsymbol{\delta y}_{n+1}$ が求まれば、$\boldsymbol{\delta y}_n$ が求められることを意味している。問題をいつまでも先送りしているだけの様に見えるかもしれないが、そうではない。

一番外側のメッシュ点 $n = N$ では、$n = N - 1$ での (8.117) 式の残りの 2 本の式と表面での 2 本の境界条件 (8.112) 式とで

$$(\boldsymbol{\Sigma}) \begin{pmatrix} \delta y_1^{N-1} \\ \delta y_2^{N-1} \\ \delta y_3^{N-1} \\ \delta y_4^{N-1} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{\Pi}) \begin{pmatrix} \delta y_1^{N} \\ \delta y_2^{N} \\ \delta y_3^{N} \\ \delta y_4^{N} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}), \tag{8.152}$$

を得る。但し、ここで、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} A_{31}^{N-1} & A_{32}^{N-1} & A_{33}^{N-1} & A_{34}^{N-1} \\ A_{41}^{N-1} & A_{42}^{N-1} & A_{43}^{N-1} & A_{44}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.153}$$

$$(\boldsymbol{\Pi}) = \begin{pmatrix} B_{31}^{N-1} & B_{32}^{N-1} & B_{33}^{N-1} & B_{34}^{N-1} \\ B_{41}^{N-1} & B_{42}^{N-1} & B_{43}^{N-1} & B_{44}^{N-1} \\ G_{31}^{N} & G_{32}^{N} & G_{33}^{N} & G_{34}^{N} \\ G_{41}^{N} & G_{42}^{N} & G_{43}^{N} & G_{44}^{N} \end{pmatrix}, \tag{8.154}$$

それに

$$(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} -\bar{d}_3^{N-1} \\ -\bar{d}_4^{N-1} \\ -\bar{g}_3^N \\ -\bar{g}_4^N \end{pmatrix} \tag{8.155}$$

である。$n = N-1$ の (8.145) 式を (8.152) 式に代入すれば、4 次の正方行列 $(\boldsymbol{Z})$

$$(\boldsymbol{Z}) \equiv [(\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{R}_{N-1}) + (\boldsymbol{\Pi})] \tag{8.156}$$

と列ベクトル $(\boldsymbol{c})$

$$(\boldsymbol{c}) \equiv [(\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{r}_{N-1})] \tag{8.157}$$

を使って、

$$(\boldsymbol{Z}) \begin{pmatrix} \delta y_1^N \\ \delta y_2^N \\ \delta y_3^N \\ \delta y_I^N \end{pmatrix} = (\boldsymbol{c}) \tag{8.158}$$

となるが、$(\boldsymbol{Z})$ の逆行列を (8.158) 式にあてがえば、

$$\begin{pmatrix} \delta y_1^N \\ \delta y_2^N \\ \delta y_3^N \\ \delta y_I^N \end{pmatrix} = (\boldsymbol{Z})^{-1}(\boldsymbol{c}). \tag{8.159}$$

を得る。こうして、ここにきて、一番外側のメッシュ点での解 δy_i^N $(i = 1, \cdots, 4)$ が求められるのである。一旦、δy_i^N が決まれば、これを $n = N-1$ に対する (8.145) 式に代入すれば、$n = N-1$ についての解 δy_i^n を得る。同様の操作を繰り返し、解 δy_i^n が順次得られる寸法だ。δy_i^n が充分小さくなるまで補正を繰り返してやれば、逐次解を得ることが出来る。

8.4.5 Henyey 法の利点

こうして、非線形常微分方程式の境界値問題を、推定した解の近傍で線形化して、解くことが出来ることが判ったと思う。線形化した点が、Henyey 法の真髄ではない。線形化して得た、方程式 (8.129) を、左辺の大きい係数行列の逆行列を求めるのが困難なところを、小行列に区分化して、解いていった点が本質なのである。元の係数行列は $4N \times 4N$ 次であった。それに対して、Henyey 法では 4×4 の区分行列を N 回取り扱うのである。行列の演算は、行列の次元の二乗に比例するから、元の係数行列そのものの逆行列演算は $16N^2$ に比例するのに対し、Henyey 法では、$16N$ にしか比例しない。従って、N が大きくなるにつれて、Henyey 法の優越性が顕著となる。