システム数理IV

牧野淳一郎

1998 年 8 月 13 日

1 はじめに

この講義では、一般にシステムを解析するための強力な手法である数値シミュレーションのなかで、特に常微分方程式系の解法を概観することにしたい。

まず、事務的なことを ：

1.1 参考書

- 数値解析入門 (三井著、朝倉書店、1985)
- 微分方程式の数値解法 I (三井著、岩波講座応用数学、1993)
- Numerical Hamiltonian Problems, J.M. Sanz-Serna and M.P. Calbo, Chapman & Hall 1994

をあげておく。 数値解析入門」は絶版らしいが、常微分方程式の数値解法について初歩から高度な方法まであつかった日本語でよめる本としてはもっとも優れたものであるといってよいと思う。その次は同じ著者のもうちょっと薄い本で、薄くなったのに内容はあまり減っていないのでちょっと難しい。

英語でよい本はいくつかあるが、それらは上にあげた本に紹介されている。ここであげたのはハミルトン系 (普通の運動方程式で書けるということ) に対して特化した、シンプレクティック法と呼ばれる方法の概説書である。

あと、数値解析の前に、解けるような常微分方程式とか、解の存在 / 一意性、安定性等についての一般理論の概説としては、多数の本があるが、

- 新微分方程式対話 (笠原著、現代数学社、1970)

は平易な語り口でよい。

1.2 評価

レポート である。講義中にいくつかレポート課題をだすので、そのなかから何題か選んで解答してもらう。なお、数値計算法の講義であるので、実際にプログラムをつくってもらうような課題もある。

1.3 講義内容

講義案内にも書いたように、以下のようなテーマ (1 つ 1 週というわけではない) を扱う。

1. なぜ数値解法をやるかということ
2. 常微分方程式の解の存在と数値解
3. 解法 I :ルンゲ・クッタとそのバリエーション
4. 解法 II :線形多段階法
5. 解法 III :補外法
6. 安定性と大域誤差—数値解はどれほど「正しい」か I
7. 「硬い」方程式とそのための解法
8. ハミルトン力学系とそのための解法
9. 後退誤差解析—数値解はどれほど「正しい」か II
10. 「振動的に硬い」方程式

2 なぜ数値解法をやるのかということ

4 学期の講義のなかで、システム数理 I では線形システムの特に制御理論をあつかったことと思う。線形システムというのは、基本的に、系が (近似的に) 線形の方程式で記述できる、いいかえれば

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \tag{1}$$

の形に書けるもののことである。この系の良いことは、答がわかるということである。一変数ならもちろんだが、多変数、あるいは高次の導関数があるようなものでも、線形である限り答えは固有解の重ね合わせでかける。

こういうシステムというのは、工学的な応用上は重要である。例えば、ちょっと昔のオーディオ機器を考えてみると、これはテープとかレコードに信号が記録されていて、それを読みとって増幅して音にする。ここで、レコードから信号を読み出すピックアップ、それを増幅するプリアンプ、メインアンプ、さらにはスピーカのそれぞれが、入ってきた信号をなるべく忠実に増幅したり、あるいは位置変化を電気信号に変えたり、あるいは電気信号を空気の振動に変えたりする。

そのほか、人工システムというのは、たいてい、線形な振舞いをするようになっているものである。これはどうしてかというと、線形でないようなものは設計のしかたとか、使い方がよくわからないからである。

もちろん、線形の逆の極端になればまたそれは振舞いが簡単になる。その例はディジタル回路であり、これは線形とは逆に、入力、出力がともに on—off の 2 値であらわされるわけである。

こういうわけで、例えばエレクトロニクスでは、回路というのは線形 (リニア) 回路 (アナログというよりリニアの方が使われる) とディジタル回路にわかれるということになる。

ここで注意しなければいけないことは、こういった、線形とかディジタルというのは、あくまでも「理想化」に過ぎないということである。なにがいいたいかといえば、工学的に作ったものでも、理想的に線形であるということはなくかならず非線形性がある。(ディジタルはちょっと話がちがって、理想的であるといってもいい)

例えば抵抗というものを考える。これはオームの法則

$$I = V/R \tag{2}$$

に従うと高校では教わるわけだが、もちろんものごとはそんなに簡単ではない。簡単ではない理由はいろいろあって、一つはまだ線形の範囲で、インダクタンスとかキャパシタンスがあるということ、もう一つはこれら自体が入力信号によって変化するということである。どんなふうに変わるかというのはいろいろあるけれど、例えばどんどん電圧をあげていけば発熱して温度が上がり、抵抗が大きくなる。もっとどんどん電圧をあげていくといつかは燃えはじめて、切れてしまったりもするわけである。

バネ、あるいは一般に機械的変形というものを考えても同じことで、ある範囲では線形に振舞うが変形が大きくなると応答が非線形になり、そのうちに壊れてしまう。

というわけで、工学的に作るものというのは、わりと線形の範囲で使うものが多い。これにはいろいろな理由があるが、もっとも大きいものは、線形でないと答がわからない ということである。何か目的があってものをつくるわけだから、どう作ったらどう動くかということが簡単に計算出来ないといけない。このためには線形性というのは本質的である。

しかし、自然システムの方をみれば、非線形なものはいくらでもある。そういったものは、解 (つまり、たとえば時間変化) が固有関数では書けない。また、それだけではなく、多くの場合に 「可積分」ではないということがわかっている。

2.1 可積分と非可積分

ここでいう可積分性とは、系の振舞いが十分な数の保存量によって制限されていて、それらと時間の関数の形に解が書き下せるということである。例えば 1 次元調和振動子

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \tag{3}$$

を考えてみると、この解というのは x と $v = dx/dt$ の空間では円上を等角速度で運動することになる。従って、初期条件がわかれば任意の時刻での 「解がわかる」。数学的には、ハミルトン系 (普通の、運動方程式が書けるような系。ただし、摩擦とかがない理想的なもの) では、自由度の数の 2 倍マイナス 1 個だけ保存量があれば可積分であるということになる。

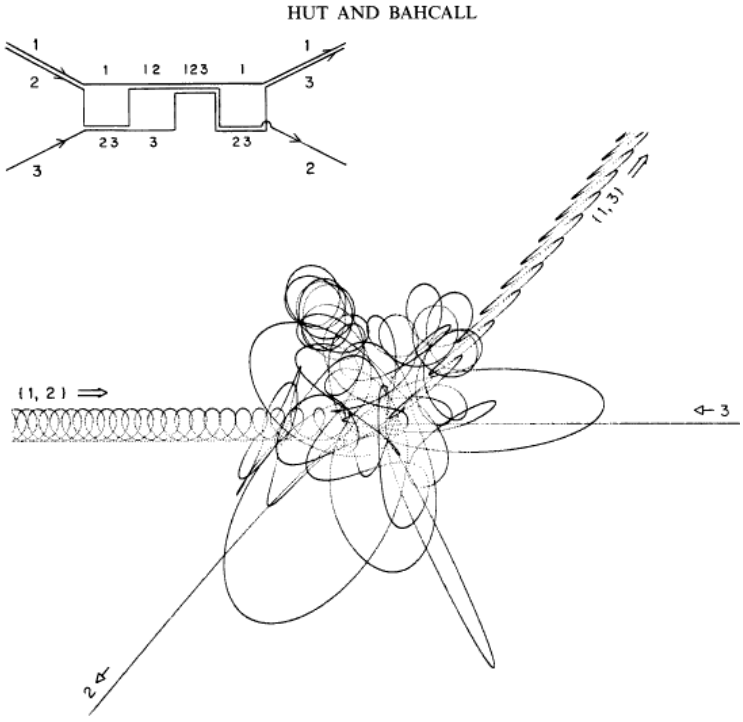
N 自由度のハミルトン系の状態は $2N$ 次元の空間のなかの 1 点として表現でき、系の時間発展はそのなかの軌道として表現できる。大雑把にいうと、保存量が 1 つ増えれば解 (軌道) の存在できる空間が 1 次元減る。$2N-1$ あると 1 次元に落ちるわけである。

自由度が増えたり、あるいは非線形の方程式になっても、もちろんこのような解がある場合というものもある。例えば、太陽の回りの惑星の運動というのは、 (惑星が 1 つだけなら) 可積分である。これは、周期解があるということからも想像がつくであろう。

しかし、惑星が 2 つになって、そのあいだの相互作用があると、これはもう可積分ではない。この場合にも、相互作用の効果を近似的に付け加えていく摂動法のようなものが使える場合もあるが、それでは済まないような場合も無数にある。

たとえば、図に示すのは、3 体問題の計算例である。これは 1981 年にでた論文からとった図である。こういったものは、周期解に近いと思ってなんとかできるものではないということはわかるであろう。

こういった、面倒な話というのは世の中にいっぱいあって、可積分とか、それに近いとかいったことを前提にする方法では対応できないわけである。



さて、可積分でないといっても、 解がない」わけではない。上の図はまさにそういった解を示しているわけである。

この解を求めるのはどうやったのであろうか ?もちろん、計算機で計算してもとめたわけである。しかし、計算してといわれても、実際にどんなプログラムで何を計算したのだろうか ?また、この答えは 合っている」のだろうか ?そもそも計算機で求まった答があっているとか間違っているとかはどうやって判断するのだろうか ?

といったようなことを、この講義では考えていくことにしたい。

3 解の存在

まあ、ここまではお話しなので適当にきいていてくれてかまわないんだけど、ここからは本題。

微分方程式系が与えられた時、それに解があるかどうかというのと、それが可積分かどうかというのは別の概念である。というわけで、 常微分方程式に解がある」とはどういうことかという話をする。以下、面倒なので 1 変数の場合、すなわち

$$dx/dt = f(x,t) \tag{4}$$

で話をするが、今日の議論はそのまま多変数に拡張できる。あ、それから、この講義ではほぼ初期値問題だけを扱う。初期値問題とは、要するに上の方程式のある時刻での解の値 (初期条件) が与えられて、そこから時間 (とは限らないが、独立変数) を変えていった時の解が欲しいというものである。

境界値問題というものもある。例えば、まっすぐな棒を一方の端でもって支えたら、重力で少し曲

がる。これは、一方の端は固定されていて、他方は自由だが、導関数についてみると条件がつく。こういうのが境界値問題ということになる。両端でささえたときにどう曲がるかというのも境界値問題であり、境界条件の付け方がちがう。また、線形の固有値問題というのも応用上は重要である。

解法という観点からすると、境界値問題等は初期値問題の応用と考えられるので、この講義では基本的に初期値問題を扱うことにしたい。

4 初期値問題の解の存在

さて、初期値問題である。直観的には、初期値問題であれば、初期値があればその少し後の値が決まり、その少しあとの値が決まればまたそのあとも、、、ということで決まっていく (数値解—計算機で求める解—は実際にそんなふうにする) わけで、そういう方針で構成的な解の存在証明をすることも不可能ではない。が、普通の教科書 (常微分方程式論の) にのっているのはピカールの方法というものなので、一応それにそって説明する。

常微分方程式の初期値問題

$$dx/dt = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

の $t_0 \leq t \leq t_1$ での解を考える。今、 関数 f が領域 $t_0 \geq t \geq t_1, |x - x_0| \leq b$ で連続であり、最大値、最小値をもつとしよう。絶対値が M でおさえられ、 $t_1 - t_0 < b/M$ という関係がなりたつとする。さらに、上の範囲の任意の t, x と x' についてリプシッツ条件

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq L|x - x'| \tag{6}$$

を満たすものとする。

このとき、上の常微分方程式の初期値問題の解は存在し、しかもただひとつであるというのが。解の存在と一意性についてのコーシー・リプシッツの定理である。

以下、証明である。証明のためには、逐次近似といわれる方法を使う。具体的には以下の関数列を考える。

$$\phi_0(t) = x_0, \tag{7}$$

$$\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', \phi_k(t'))dt' \tag{8}$$

まず、この関数列が以下の性質をもつということを示す。

1. 連続である
2. $x_0 - b \leq \phi_k(t) \leq x_0 + b$ を満たす

これらは帰納法で示せる。面倒なので省略。次に、この関数列が一様収束することを示そう。このためには、級数

$$\sum_{p=0}^{\infty} (\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)) \tag{9}$$

(これは定義により $\phi_{k+1} - x_0$と同じもの) の一様収束が示せればよい。

$$|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(t, \phi_k(t)) - f(t, \phi_{k-1}(t))dt| \tag{10}$$

である。ここでリプシ ッツ条件から

$$|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| \leq L| \int_{t_0}^{t} |\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)|dt| \tag{11}$$

となる。今、 $k = 1$ の場合について考えると、

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| = |\phi_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)dt \right| \leq M|t - t_0| \tag{12}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |\phi_2(t) - \phi_1(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |\phi_1(t) - \phi_0(t)|dt \right| \\ &\leq ML \left| \int_{t_0}^{t} |t - t_0|dt \right| \\ &= \frac{ML}{2}|t - t_0|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

あとは同様にして

$$|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}|t - t_0|^{k+1} \tag{14}$$

がいえる。従って、右辺の和が一様収束すれば左辺も一様収束する。ところが、右辺の和は指数関数のテイラー展開になっているので一様収束する。つまり、極限が存在する。

この級数の極限は、結局もとの方程式の解になっている。なお、一意性についての証明は面倒なので省略する。

さて、ここまででは、リプシ ッツ条件を満たす狭い範囲でしか解が出来ていないが、一般にはその先に延ばしていくことが出来る。これを解の延長という。

ここで求まって (というか、あることが示された) 解は、可積分でなくても存在するということをもう一度注意しておく。前に示した 3 体問題の解は、そういう意味で存在しているわけである。

5 次週予告

来週は、基本的な数値解法である Euler 法、後退 Euler 法について触れた後、それらの系統的な改良であるルンゲ ・クッタ法についてまとめる。