

計算機による実験天文学 — 重力多体系とその周辺

牧野淳一郎

国立天文台理論研究部

講義概要

1. 「理論」天文学の目指すもの
2. 天体現象の特徴
3. 自己重力多体系
 - 太陽系とその安定性
 - 宇宙膨張と銀河形成
 - 重力熱力学的不安定
4. 最近の研究から
 - ブラックホールのある系について
 - 銀河形成・渦巻構造
5. 計算機の話

そもそもどんなもの？(観測)

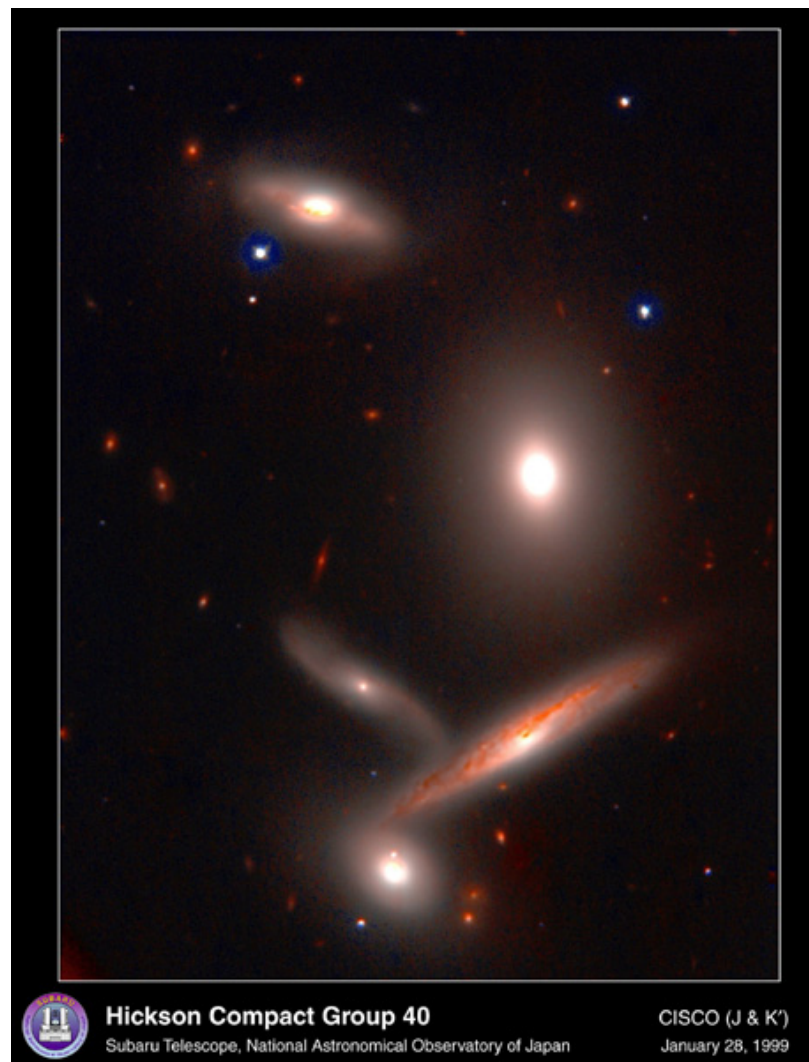
銀河



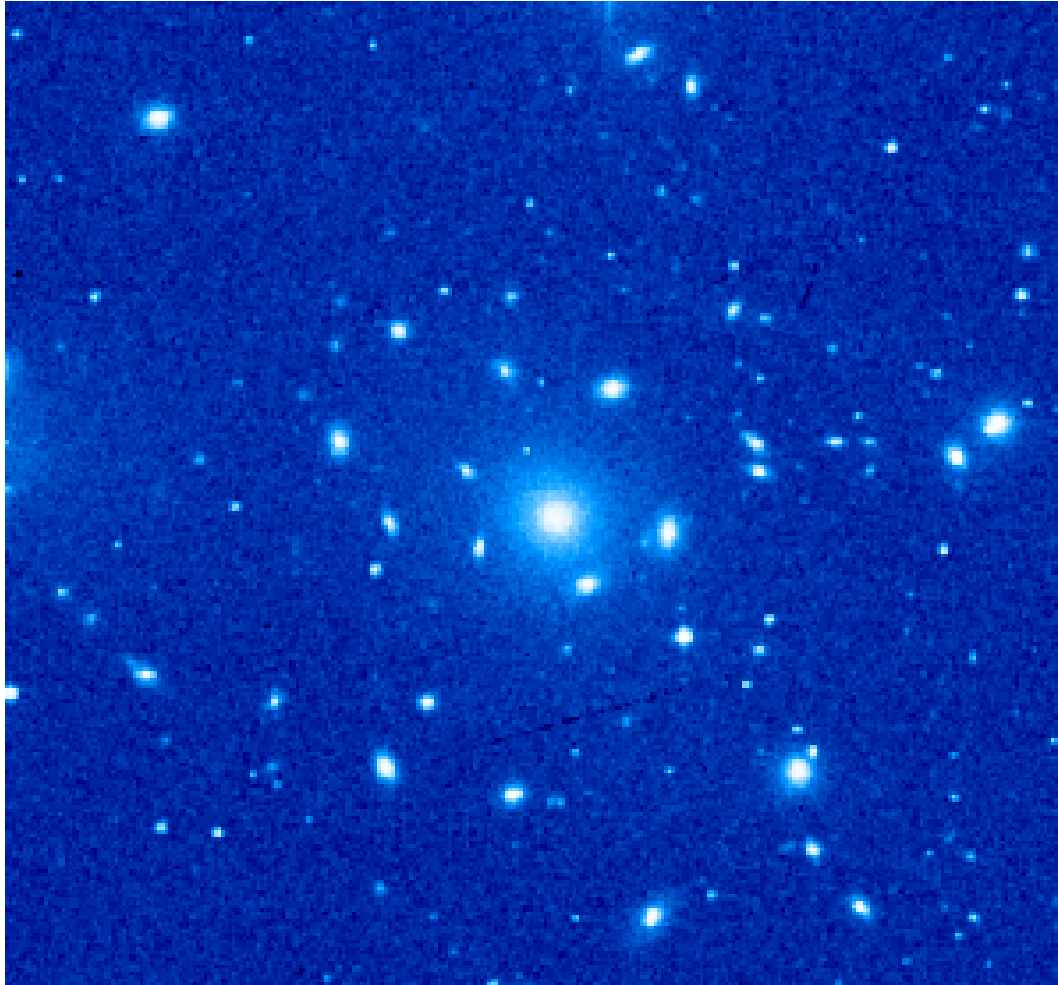
球状星団



銀河群

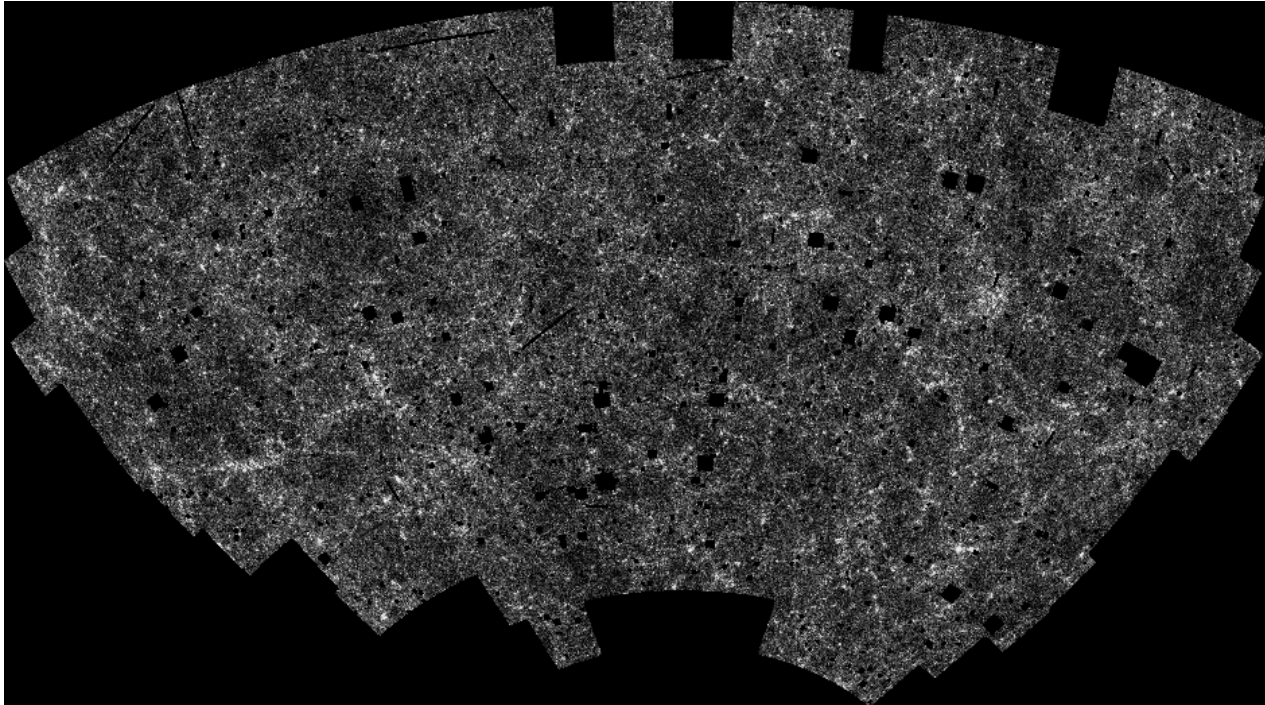


銀河団



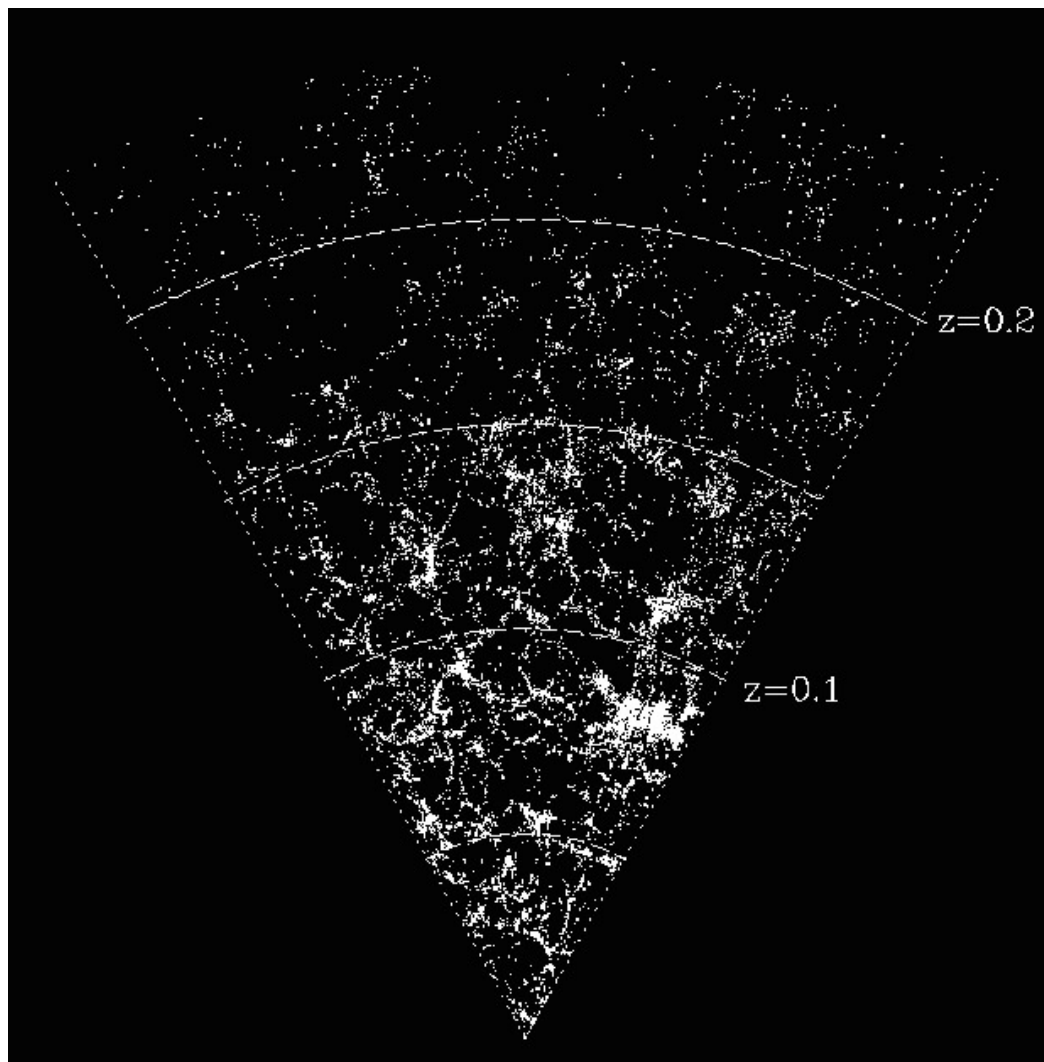
<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html>

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} - \frac{G m_j r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星（あるいは惑星）を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい（速度が光速にくらべてずっと小さい）

計算機「実験」

実際に星や惑星をどこかにおいて実験するのは不可能

計算機で支配方程式を積分することで実験の代わりにする

＝「計算機実験」

実験そのものとはちょっと違う

- こちらが入れた物理法則以外は入ってこない（はず）
- 計算があっているとは限らない

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？

— Newton 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からののに比べて 3 桁程度小さい（木星の質量は太陽のほぼ 0.1%）。従って

ケプラー問題＋摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか？（惑星の軌道は本当に安定か？）というのは現在でもまだ完全に解決されていない大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- **ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった**
- **摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した**
- **冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった**
- **単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた**

近代的な（20世紀後半の）理解

20世紀後半には**太陽系が本当に安定かどうか？**というの、

「なんだかよくわからない問題」

に戻ってしまった。

用語の「整理」

安定 太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないということを定義にする。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。(多重) 周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の「整理」(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくともある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

3体問題の性質

一般の3体問題は可積分ではない：ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

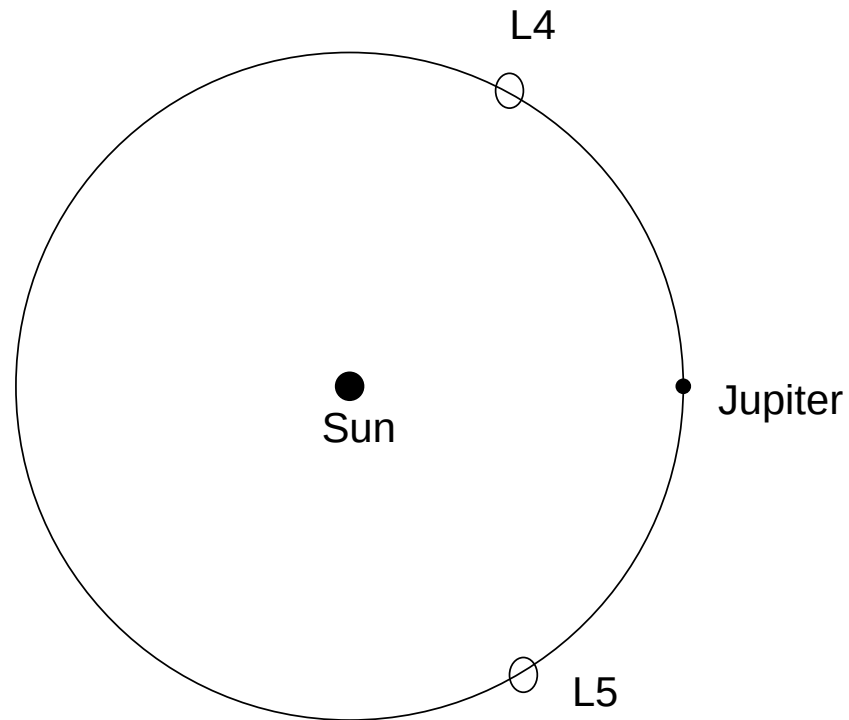
安定な解の例

ラグランジュ解（正3角形解）。

2,3 個めの質量が十分小さければ安定。

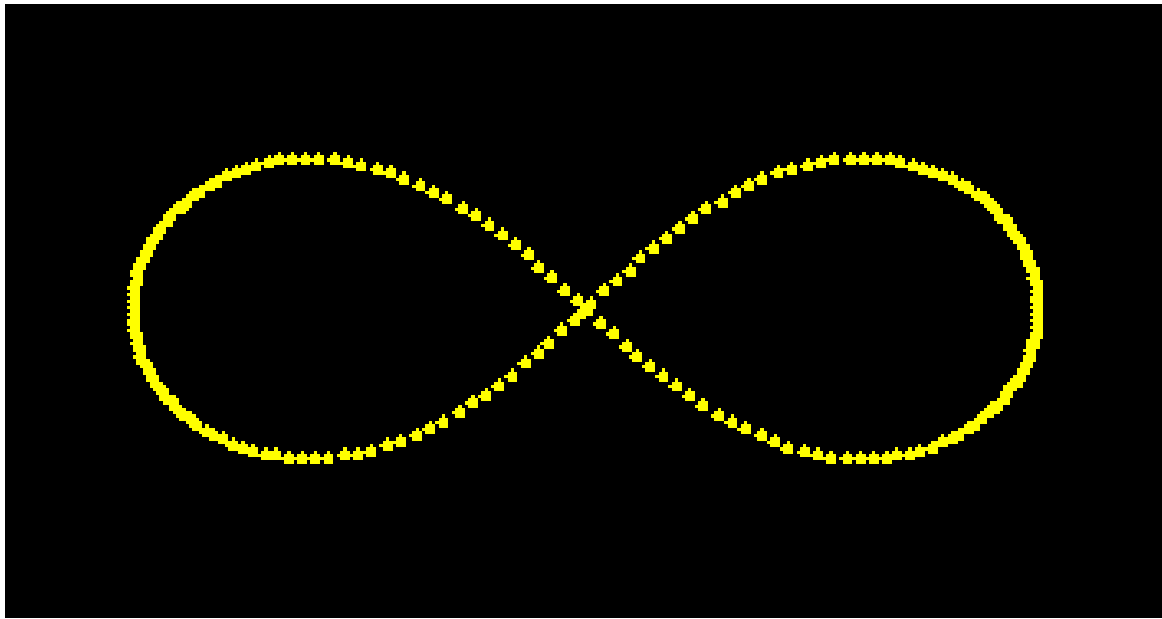
太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。

（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、..）



ちょっと余談

10年ちょっと前に発見された新しい安定軌道 —
Figure-8 Solution



アニメーション（東京大学教養学部情報図形科学
教室・船渡さん 提供）

Figure-8 solution

- 3個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定 (らしい)
- 数値的に (計算機で) 周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

太陽系の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけて
いって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法
(信用できないとわかっていない方法) ということ
になった。

「計算機で軌道を追いかける」とはどういうこ
とか？

計算機による軌道計算

ある運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad (1)$$

と初期条件

$$x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}_{t=0} = v(0) = v_0 \quad (2)$$

が与えられたとして、そのあとの時間発展を計算機で求めること。

具体的な方法

基本的には、最初の位置（と速度）からちょっと後の時刻の位置を求めるというのを繰り返す。

もっとも基本的な方法：オイラー法

1 変数で書くと

$dx/dt = f(x)$ に対して、

$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t))$ と近似するもの。

つまり、ある時刻での解のテイラー級数展開の 1 次の項までをとったもの

もっと効率の良い方法が一杯研究されている

で、安定性はどうなったかということ

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定ではない」

ということが 1987 年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。軌道間の距離が e 倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算（主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの）でわかったこと：

- リアプノフ時間は確かに 2 千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまふというようなことはおこらない（らしい）

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲（どういう範囲かはよくわからない）に軌道が収まっている（らしい）

冥王星は惑星じゃなくなったし

だからいうわけでもないが、去年 Nature にでた論文:

Vol 459 | 11 June 2009 | doi:10.1038/nature08096

nature

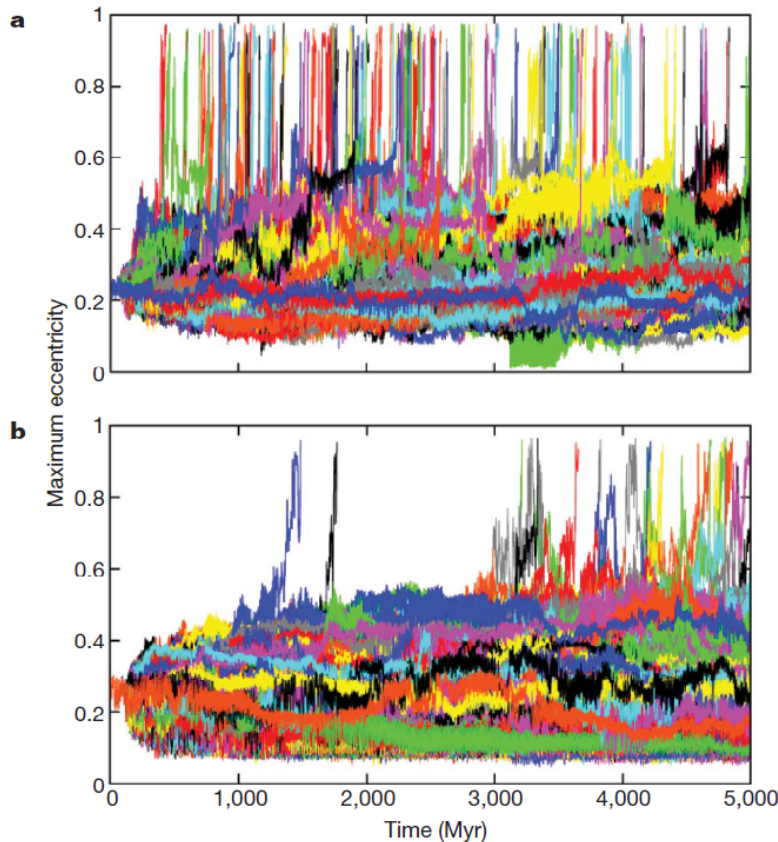
LETTERS

Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth

J. Laskar¹ & M. Gastineau¹

地球が水星や金星とぶつかる ???

Laskar and Gastineau 2009



- 水星の初期の位置をほんの
ちよつとだけ (0.38mm) づつ
変えて、沢山の「太陽系」の
進化を計算した
- 結構な数の「太陽系」で、水
星の離心率が大きく上がって
金星や地球とぶつかった
- 但し、一般相対論的効果をい
れると、いれない場合より安
定になった

本当に計算あつてるのかどうか
は？

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはまだよくわかっていない。

色々な人が色々な方法で研究中。

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に移る。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

ニュートンが考えたこと：

太陽と同じような星が宇宙全体に広がっているとすれば、それらはお互いの重力で集まったり落ちてきたりぶつかったりしないか？

本人が考えた解答：

落ちてくるのには1億年くらいかかるから大丈夫
(というか、宇宙の年齢がこれで決まる？)

現代的な解答：

2つの問題があることになる。

- 宇宙全体としてはなにがおきているのか
- 一つ一つの星、太陽系、銀河とかについてはどうか？

宇宙全体としてはなにがおきているのか？

「宇宙論」の基本的問題。

＝宇宙空間というものはどうやってそこに存在できているか？

一般相対性理論で初めて本当に扱えるようになった問題。

ものが落ちないようにする方法

- 「反重力」でささえる
- 宇宙は広がっているということにする。重力で減速はしている。
- 上の2つの組み合わせ

「反重力」なんての超科学かトンデモかと思うかもしれないけど、これはそうでもなくて**アインシュタイン自身のアイディア**。そういうもの（宇宙項）があるということにすると空間が落ちてこないで済む。

宇宙膨張

宇宙が全体として膨張しているとすればアインシュタイン方程式に宇宙項をつけなくても解がある：ルメートルとかド・ジッターのアイディア。これは 1920 年ころ。

遠くの銀河を観測すると本当に距離に比例した速度で遠ざかっているらしいとわかってきたのが 1930 年頃。

最初は速度－距離の比例係数の見積りがいまと 10 倍違ったのでいろいろ混乱があった。

宇宙膨張の問題点

当初の問題：

宇宙の年齢が今の $1/10$ になって、放射性元素で決めた地球の年齢よりずっと若くなった。

これを回避するために、「膨張するけれど定常で年齢は無限大」といったモデルも考えられた。

最近は大きな矛盾はなくなっている（一応）。

宇宙膨張の数学

ニュートン力学で考えても振舞いは同じなので以下簡単に：

宇宙は一様でどこでもものの密度 ρ が同じであると考え

で、ある半径 R の球を考える。その表面での重力加速度は

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho R^3 / R^2 = -\frac{4}{3}\pi G \rho R \quad (3)$$

ここで、加速度は半径に比例することに注意。

数学（続き）

宇宙全体が一様膨張または収縮するという状況を考えると、ある点（半径）の運動方程式は単に重力がその中にある質量に比例することになるので、ケプラー問題と同じ（だが、一次元）になる。

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G M / r^2 \quad (4)$$

ここで M は時刻が同じなら ρr^3 。違う時刻では、「長さがどう変わったか」というものを $a(t)$ という関数であらわすことにすると

$$\rho(t) = \rho_0 / a^3, \quad r = r_0 a \quad (5)$$

数学（続き 2）

a の従うべき方程式は結局

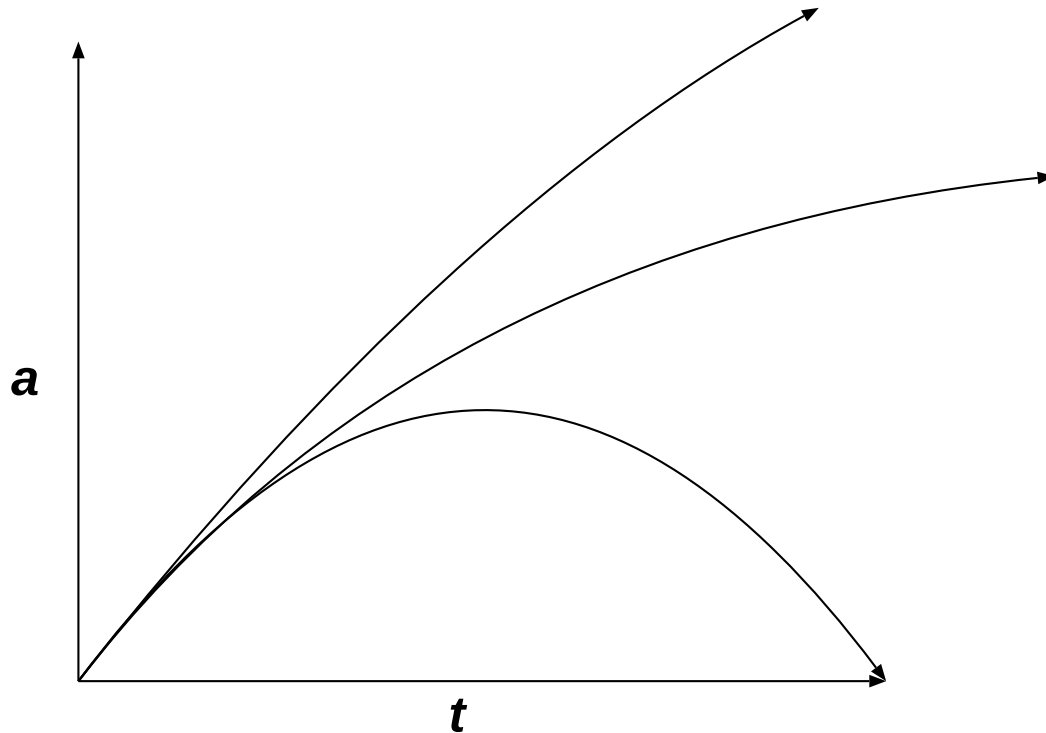
$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0/a^2 \quad (6)$$

この解は初期条件によって

- **無限に膨張する。無限の時間たっても有限の速度で膨張**
- **無限に膨張する。無限の時間たつとちょうど速度が 0**
- **どこかで収縮を始めてまた一点に戻る**

宇宙膨張の3通り

それぞれが2体問題の双曲線解、放物線解、楕円解
に対応



現実の宇宙は？

決定的な証拠があるとはいいい難いが、いまのところいろいろな観測結果ともっとも矛盾しないのは、

- 無限に膨張する
- しかも、単純な双曲線解よりも最近膨張が速くなっている

というのが一番「本当らしい」

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題は依然として残っている。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは)一様で密度一定であるとしても、小さなスケールになると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、ものが集まってできるのが銀河とか銀河団ということになる。つまりは、ニュートンが最初に心配した、「星が落ちてくるのではないか」という問題に対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる）

ダークマター？

見えるバリオンの量（星と、あとは電波や X 線でみえる水素ガスの量）：例えば銀河系の質量や、銀河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、（僕の意見としては）大きいのは重力理論が違ふことにした時に、銀河毎に重力理論が違ふというわけにはいかない（統一的な説明があるはず）とすると説明が難しいということ。

ダークマターは何か？

大きくわけて 2 つの理論：

- Hot dark matter 質量をもったニュートリノが大量にあって、それが宇宙の物質のほとんどを占めている。
- Cold dark matter 未知の素粒子があってそれが宇宙の物質のほとんどを占めている。

実はニュートリノではうまくいかないということがわかっている。（ことになっている）この場合銀河団とか大きいものはできていても銀河はまだできていないことになってしまうため。

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうにいえば「未知の素粒子」、わかりやすくいえば**なんだかわからないもの**である。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

宇宙の大規模構造形成のシミュレーション

計算の 1 例（国立天文台理論研究部・石山さん提供）

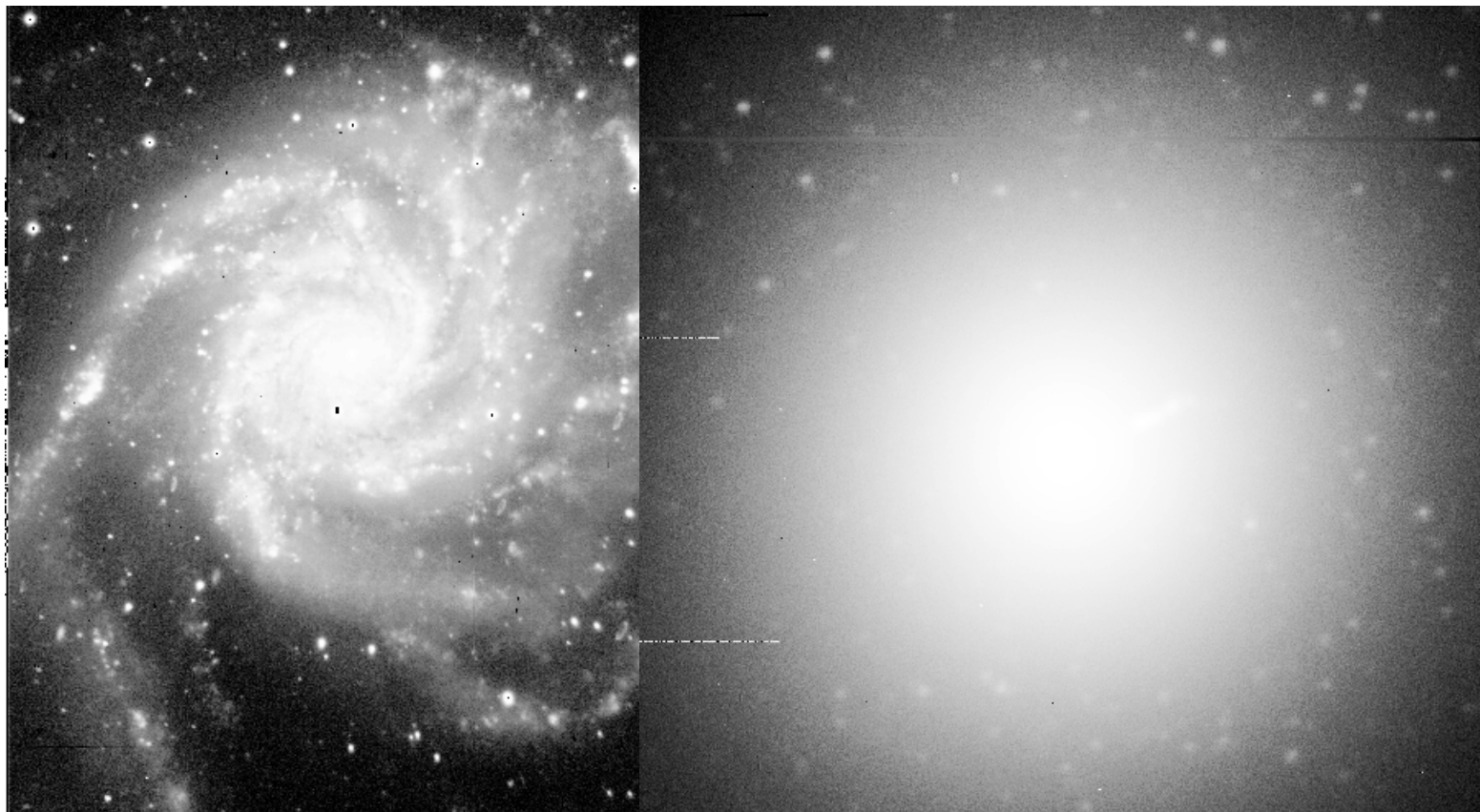
ここでやっていること：

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。
基本的には太陽系の時と同じこと

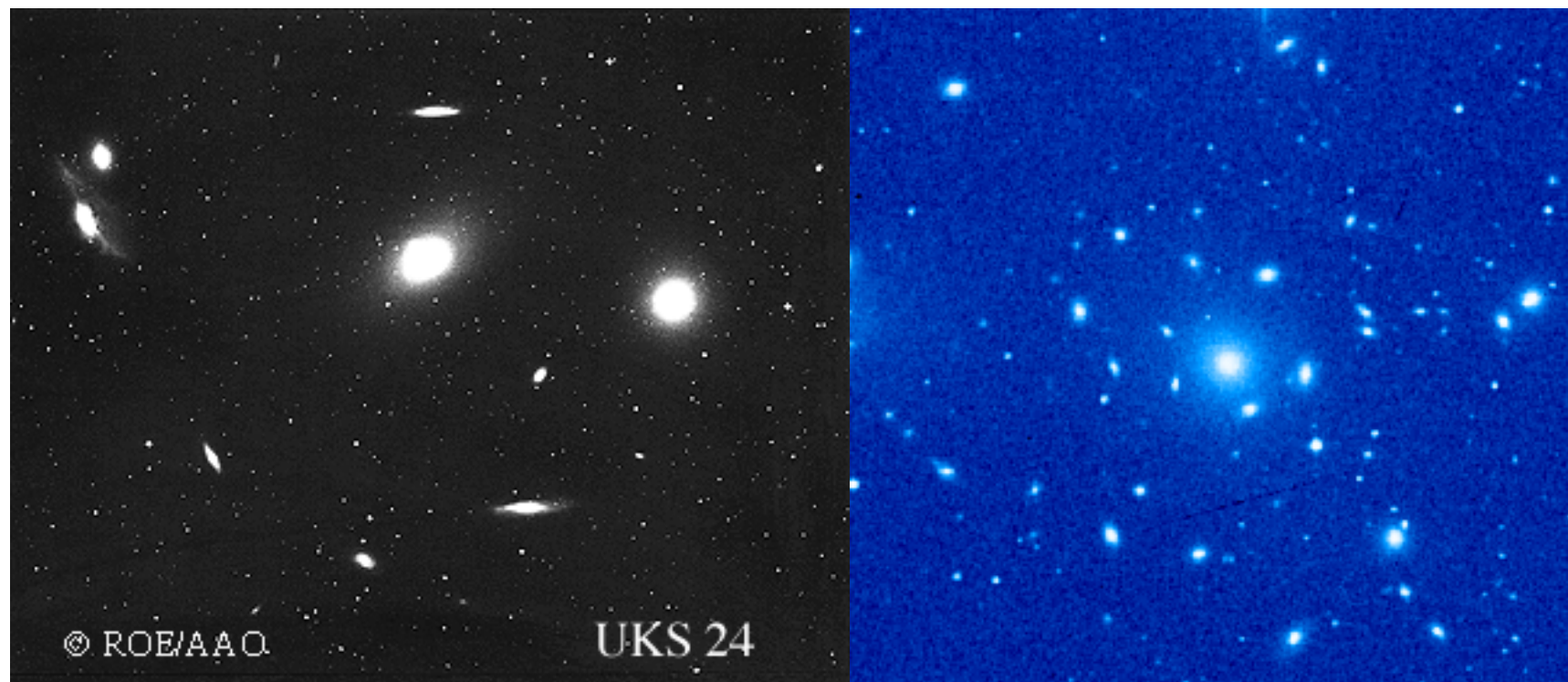
わかること

- 宇宙全体としては膨張していく
- 最初に密度が高いところは、他に比べて相対的に密度がどんどん大きくなっていく。
- 特に密度が高いところは、そのうちに膨張しきって潰れ出す。
- （このシミュレーションでは）最初に小さいものが沢山できて、それらがだんだん集まって大きなものになる
- 大雑把にいうと、銀河とか銀河団はこのようにして潰れたもの。

銀河



銀河団



宇宙論の問題としては：

- 観測される銀河や銀河団の性質、特に分布
- シミュレーションでできた銀河や銀河団の分布

を比べて、「どうすれば現在の宇宙ができるか」を決めることで、「宇宙の始まりはどうだったか」を逆に決めたい。

例えば宇宙の膨張速度、密度、宇宙項、初めの揺らぎの性質、ダークマターの性質

Ill-posed problem?

つまり、、、

- 宇宙初期の揺らぎ：(銀河や銀河団になる細かいところまでは) 直接には見えない
- 昔の宇宙の膨張速度：直接には見えない
- ダークマター：見えるかどうか (あるかどうか) もわからない

これらを、全部同時に銀河の観測から決めたい。

そんなことは可能か? という問題。

問題点

シミュレーションで出来るのは、本来はダークマターの分布だけ。

銀河になるにはそのなかでガスが収縮して星にならないといけない。

つまり、**どういう条件で星ができるかが決まらないと本当には比べられない**

- 銀河の数が変わる（合体するとか）
- 銀河の明るさが変わる（若い星があると明るい。古くなると暗くなる）

話を戻して、、、

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — 2 体問題 + 摂動

一般の 3 体問題：不安定

安定（最終）状態：2体の連星 + もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x, v)$: 6次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x, v)dx dv$ がある「体積」 $dx dv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (7)$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \quad (8)$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \quad (9)$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態にいくのか？

はよくわからない。

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

（但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、）

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間の関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- 1996 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は間違いであったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

もう一つ大きな問題

星の数は実際には無限大というわけではない。

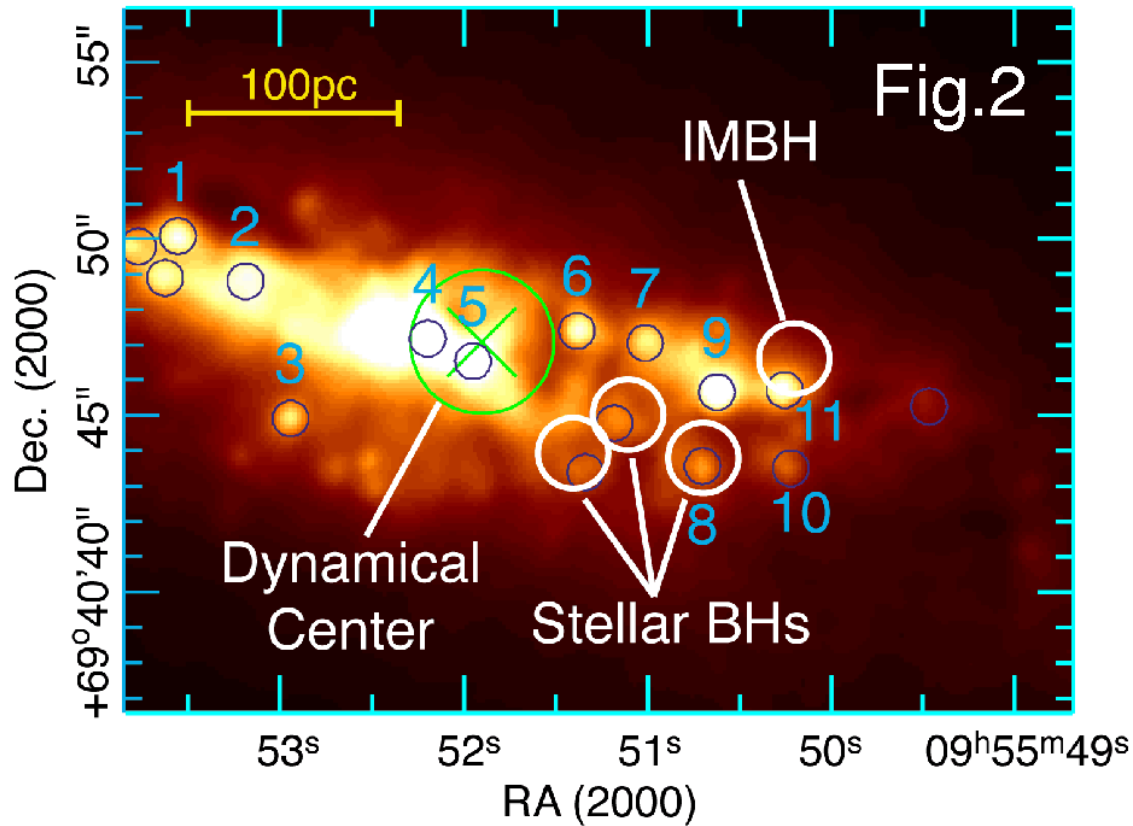
銀河： 10^{10} かなり多い、

散開星団、球状星団 $10^4 \sim 6$

銀河中心 巨大ブラックホール + 10^7 個程度の星

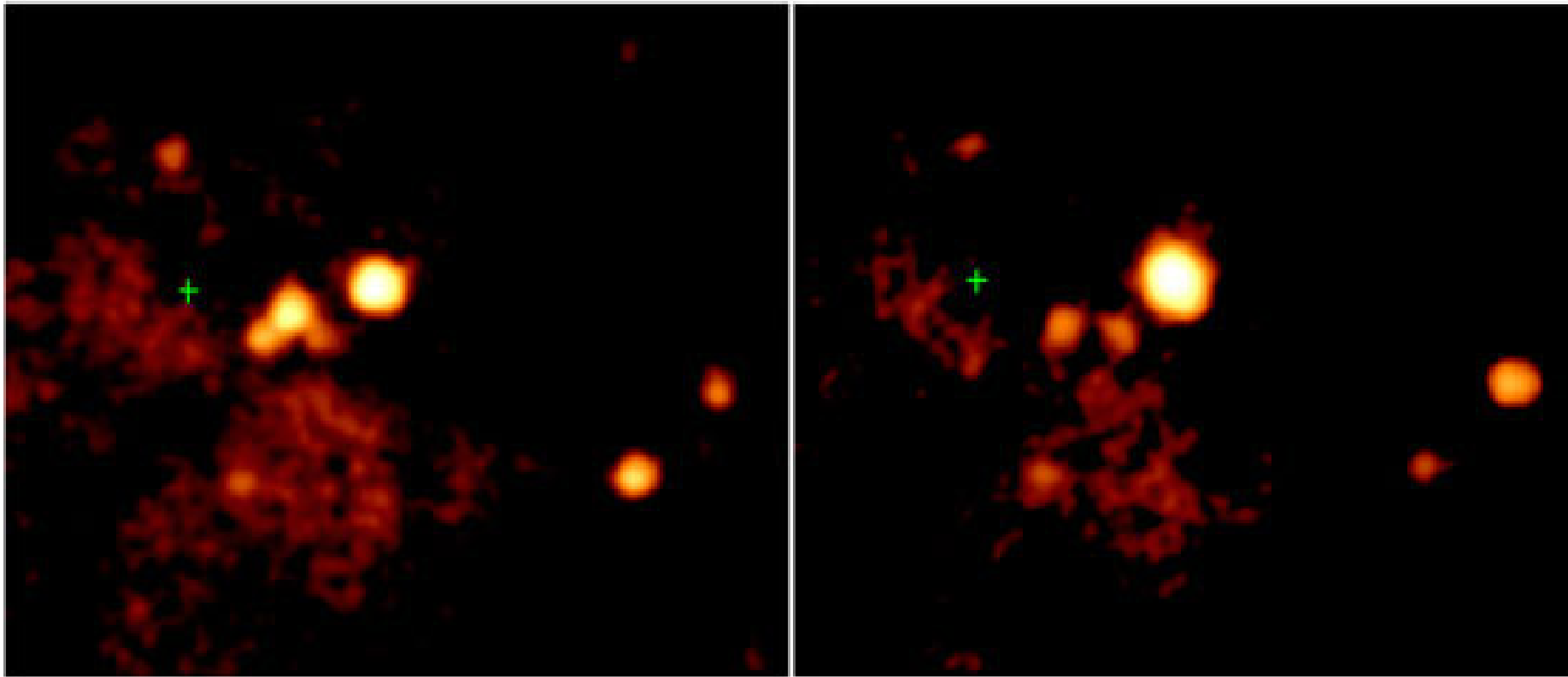
こういったところではどういことが起きるか

銀河中心



近傍の銀河 M82 の中心部の「すばる」望遠鏡による写真

X線では



NASA Chandra X線衛星による写真

こういったところではいったい何がおきているか？

無限には星が多くない時

厳密には力学平衡でない

→ それぞれの星の軌道はだんだん変わっていく

物理的には大自由度のハミルトン力学系

→ 統計力学的（熱力学的）に振舞うはず

つまり：熱平衡状態（エントロピー最大）にむかって進化するはず。

（普通の気体なんかと同じ）

普通の気体との違い

- 重力のエネルギーは質量の2乗に比例
- 粒子を閉じ込めておく箱（境界）があるわけではない

2つ違うとよくわからないので、違いを一つにしてみる。

具体的には：仮想的に球形の断熱壁でかこんだなかの理想気体を考える。

重力の効果があるくらい大きいもの。

断熱壁の中の理想気体

温度（熱エネルギー）が重力エネルギーよりもずっと大きい状態

これはもちろん重力がない時と変わらない

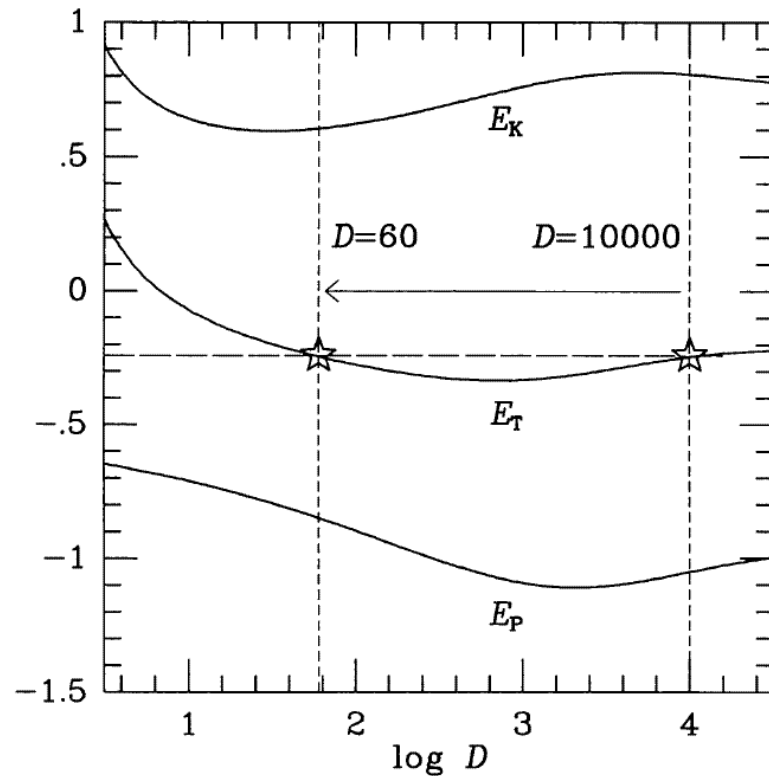
温度を段々下げていく（エネルギーを抜いていく）



重力の効果が出てくる。

具体的には、中心の密度が上がって、壁のところが下がる。これは、重力と圧力勾配を釣り合わせるため。地球の大気が上にいくほど薄くなるのと同じ。

エネルギーの下限



計算してみるとどこまでも温度を下げられるわけではない。
図に結果を示す。これは横軸に中心と壁の密度の比、縦軸にエネルギーをとったもの

熱平衡状態

$D = 709$ でエネルギーが最小になり、それ以上エネルギーが低い平衡状態はない。

さらに、エネルギーのほうから考えてみると、あるエネルギーに対してそれに対応する平衡状態が2つ以上あるところがある。

- もっとエネルギーが低い状態は？
- D が大きいところはいったいどこにか？

密度比が限界より大きい状態

これは「熱力学的に不安定な平衡状態」になっている。

安定／不安定：何度も出てきたが、ここでは「熱力学的」

温度が一様な平衡状態に、すこし温度差をつけてやる（熱エネルギーを移動してやる）

- もとに戻る：安定
- 戻らない：不安定

熱力学的安定性

普通の世の中のもの：戻るに決まっている。

熱をもらった方は温度が上がる。

とられたほうは温度が下がる。

熱い方から冷たい方に熱がながれるので、元に戻る。

ところが、、重力が効いているとそうなるとは限らない。

熱力学的不安定性

条件によっては以下のようなことが起こる

中心部から熱を奪う → 温度／圧力が下がる → 圧力を釣り合わせるために収縮 → 重力が強くなる → もっと収縮 → 結果として温度が上がる。

これが起きると、熱を奪われた方が温度が上がるので、ますます熱が流れだし、いっそう温度が上がるという循環にはいる。

これを、「重力熱力学的不安定性」という。

どうやって安定性を調べるか

「重力熱力学的不安定性」:

計算機によって安定性を調べることで初めて発見されたもの。

「計算機で安定性を調べる」というのはそもそも
どういうことかという原理的な話をすこしだけし
ておく。

安定性解析の原理

ここで問題なのは適当な偏微分方程式（系）

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(f(x)) \quad (10)$$

（ここで、 A はなんか適当な「汎関数」。具体的には、例えば普通の熱伝導なら f の空間2階微分）

の定常解 $f_0(x)$ があったとする。

定義により $A(f_0(x)) = 0$

少しずれた $f = f_0 + df$ 、 df の方程式を作る。

線形化(1)

df に何か入れればそれがどうなるかが計算できる

あらゆる可能な df について調べる？

そんなことがどうやってできるか？

これを可能にする方法が**線形化して固有値問題にする**ということ。

線形化(2)

仮定: df が f_0 よりもずっと小さい

df について線形な式にできる。

線形:

$$\frac{\partial df}{\partial t} = B(df(x)) \quad (11)$$

という形だったとして、

$$B(\alpha df_1(x) + \beta df_2(x)) = \alpha B(df_1(x)) + \beta B(df_2(x)) \quad (12)$$

という性質を満たすということ。

線形化 (3)

もうちょっとわかりやすくいうと、

df_1 が解なら df_1 の定数倍も解

df_1, df_2 が解なら $df_1 + df_2$ も解

ということ。

固有関数

このように線形な方程式には、固有値、固有関数というものがある。

固有関数は、

$$\lambda df = B(df) \quad (13)$$

の解。 λ が固有値。

この時、時間発展が $df = e^{\lambda t} df_0$ の形に書ける。

一般には任意の関数が固有関数の重ね合わせで書けるので、これら固有関数だけを調べればいいことになる。

固有値と安定性

この解（固有関数）は一般には無限個ある。

対応する固有値 λ も無限個ある。

「もっとも大きい固有値」から順に求めるような計算方法があるので、求まった最大の固有値が負（実数部分が）であれば安定ということになる。

もうちょっと具体的な計算法

まず f_0 自体が必要。

空間も細かい刻みにわけて、その各点での値を近似的に計算する。

出てくるのは連立方程式になる。これを計算機を使って解く。

f_0 が求まると、それを使って df についての方程式を具体的に書ける。

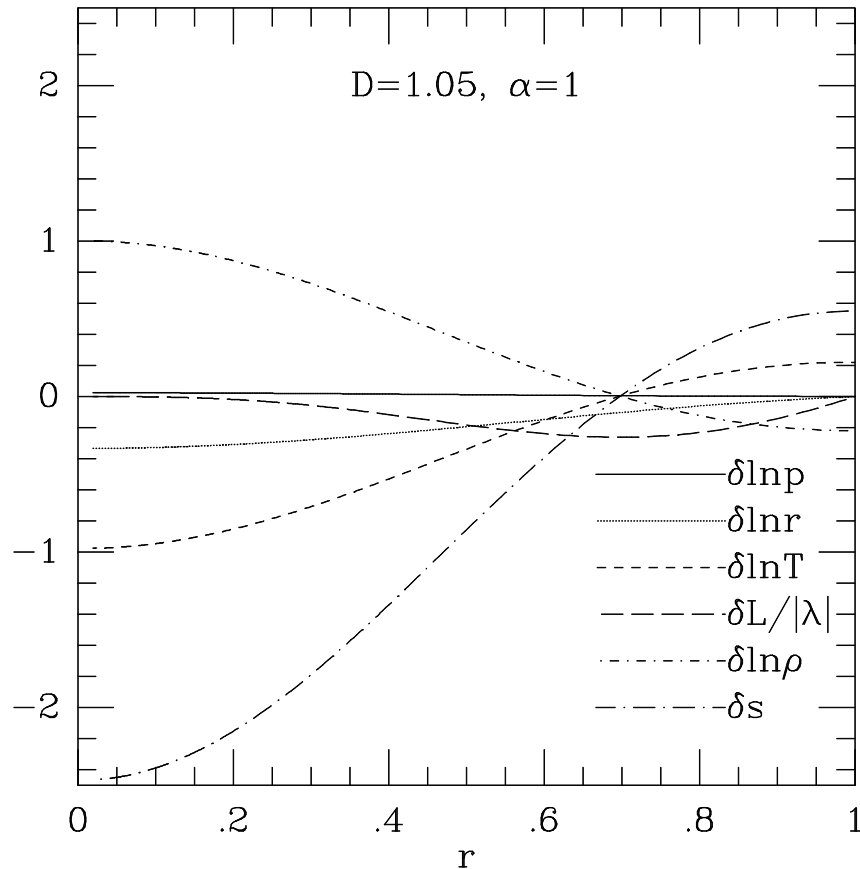
df についての方程式

これもやっぱり連立方程式になるが、線形であることから連立一次方程式になる。つまり行列でかける。

この行列の固有値、固有ベクトルを求めると、元の問題の固有値、固有関数の近似値になっている。

と、なんかややこしいが、計算機で安定性を調べるという時にはだいたいどんな分野でも同じようなことが出てくるので、ちょっと詳しく書いてみた。

安定な場合, $D = 1.05$

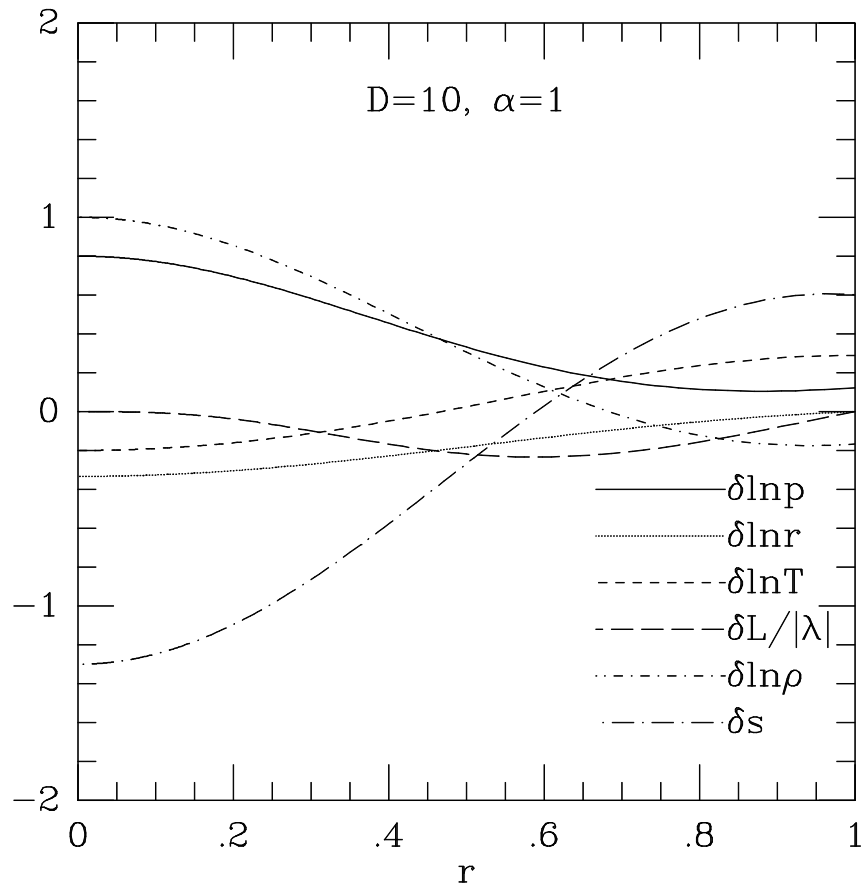


λ : 固有値

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

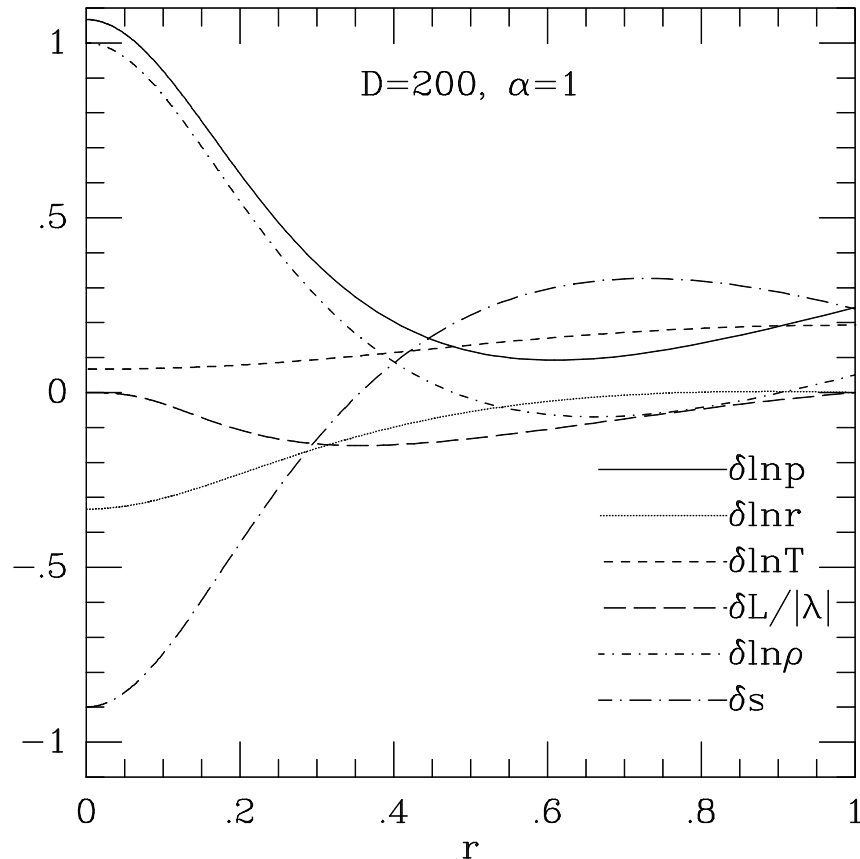
要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

安定な場合 (2), $D = 10$



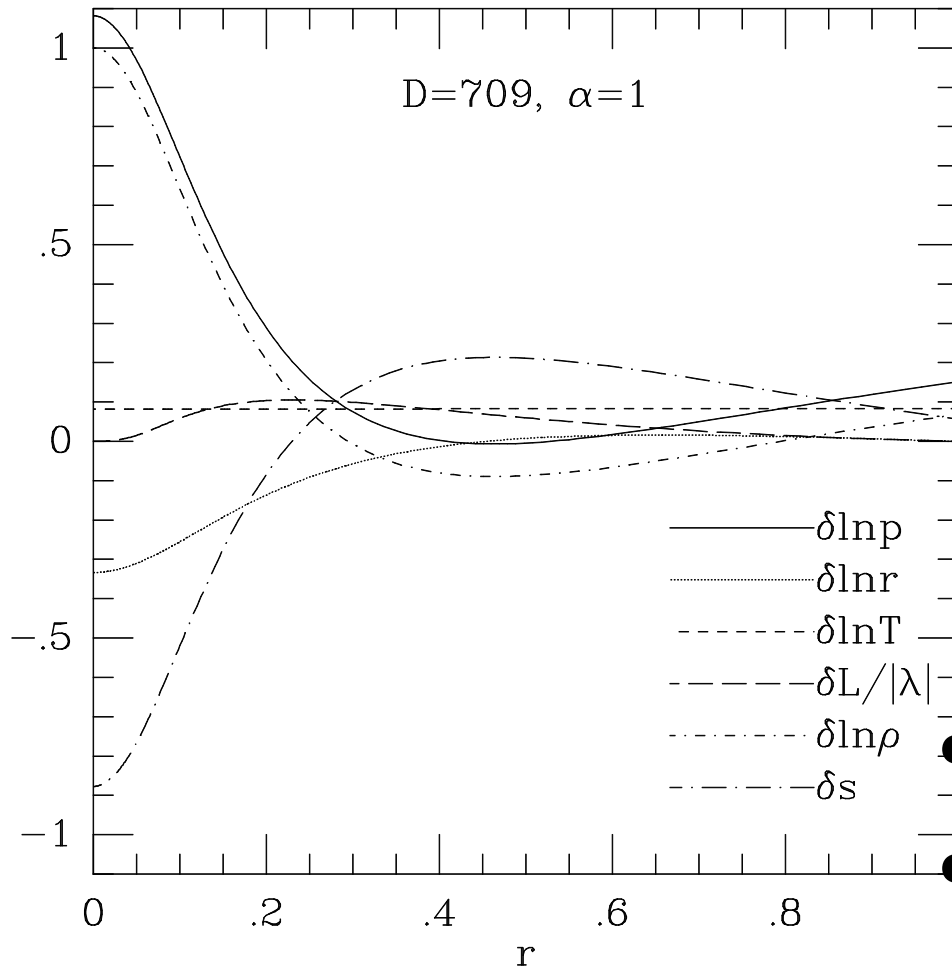
- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

安定な場合 (3), $D = 100$



- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

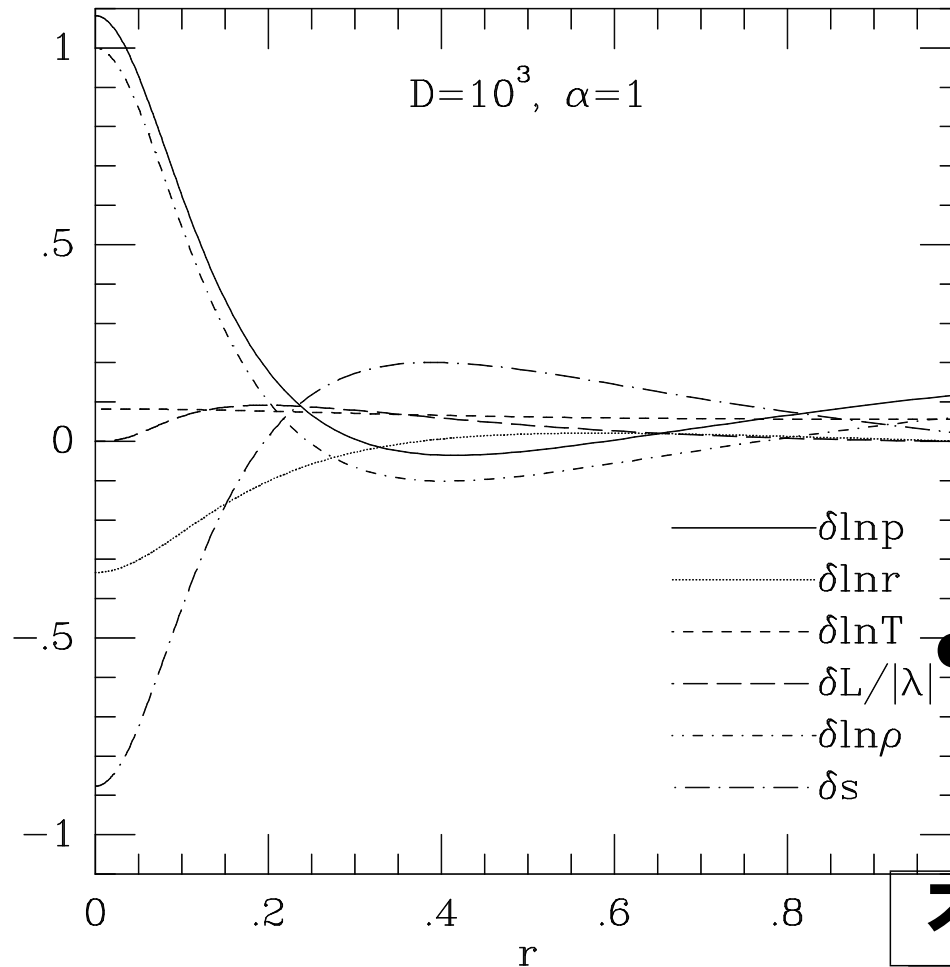
中立安定, $D = 709$



● 温度勾配ができない

● したがって、摂動がもとに戻らない

不安定, $D = 1000$



● 中心のほうが温度上昇が大きい

不安定になっている

重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 gravothermal instavility という名前がついている。

発見： V. Antnov (1961)

上のような安定性の明確な定式化: Hachisu & Sugimoto (1978)

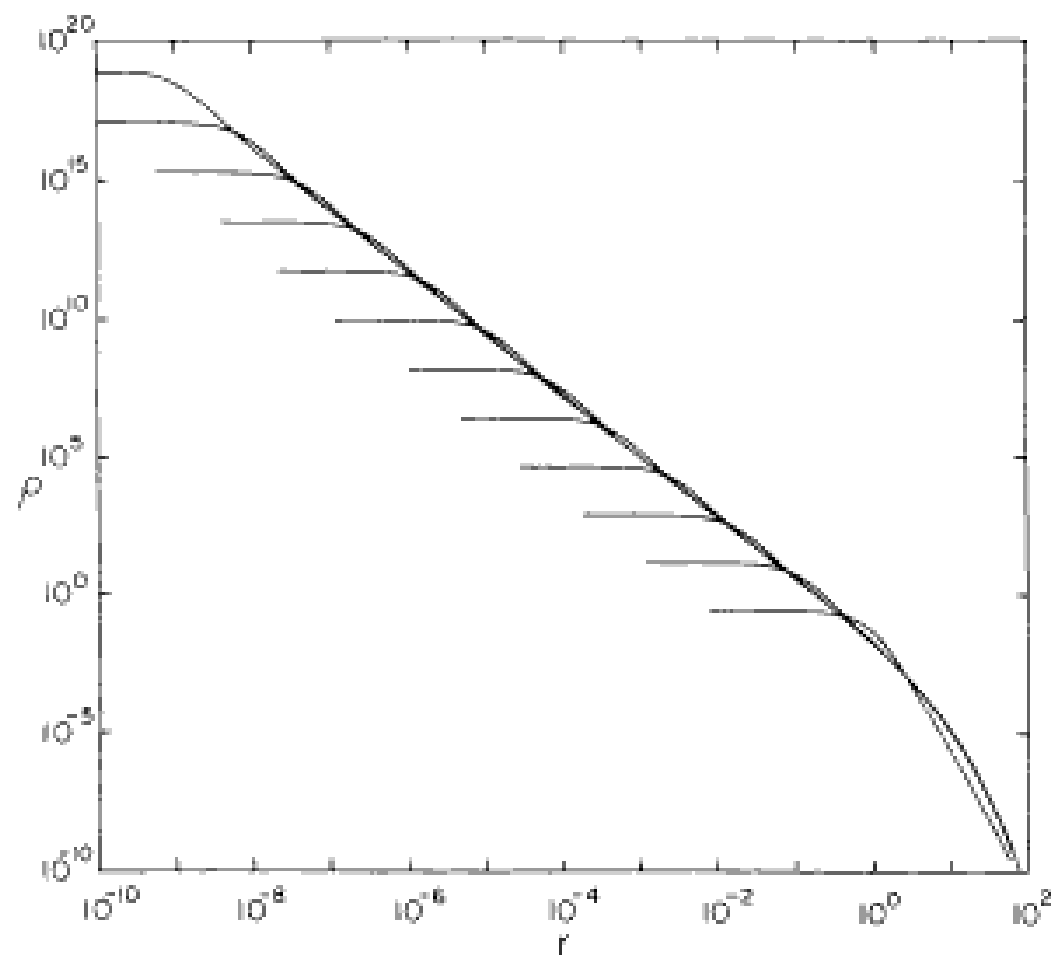
もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：自己重力流体について数値計算した。

Cohn (1980)：流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。

自己相似解



最終状態？

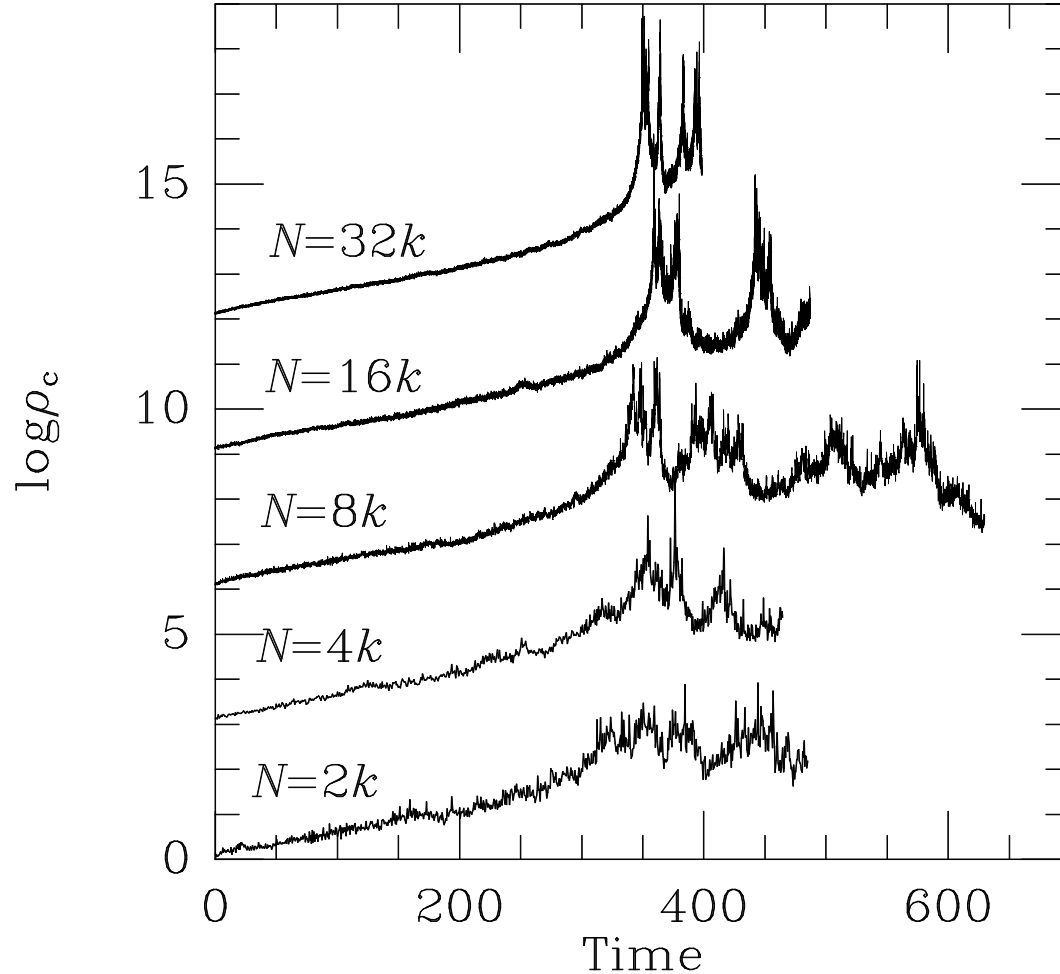
中心部の密度が非常に上がってくると、

- 星同士の近接遭遇
- 3星が同時に近付く

連星ができる。これは「エネルギー放出反応」（核融合と同じ）

これにより、今度は中心部が膨張を始めると理論的には予測されている（重力熱力学的振動）

重力熱力学的振動



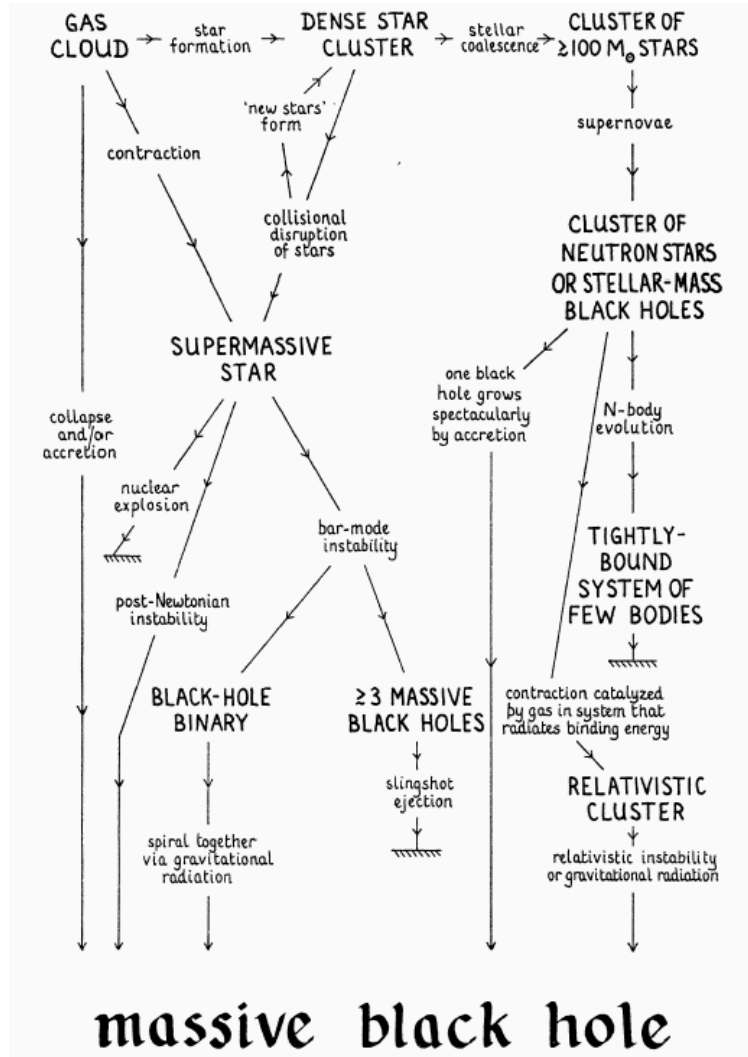
**球状星団の中心部
ではこのようなこ
とが起こっている
可能性が高い。**

最近の研究から — 中間質量ブラックホールの形成モデル

(Nature Vol 428 No 6984 724-726, “Formation of massive black holes through runaway collisions in dense young star clusters”)

1. はじめに:大質量ブラックホールの作り方
2. M82 の IMBH 候補
3. 合体シナリオ

はじめに:大質量ブラックホールの作り方



Classic View (Rees 1984)

本質的には 2 通り

- 単一の超大質量星
- コンパクト星の高密度クラスターの熱的な進化

どちらも簡単ではない...

単一の超大質量星の問題

そんなのできるか？

- 一様・球対称からのコラプス
- 小さいスケールの密度ゆらぎがない
- 潮汐場もない

とかいう極めて理想的な条件ならば、単一ガス雲が単一ブラックホールになる**かもしれない**。

高密度クラスターの熱的な進化の問題

熱力学的な進化（重力熱力学的崩壊）

→ 非常に小さいコアになる（大質量ブラックホールはできない）。

何故かはじめから相対論的なクラスタがあれば話は違うが、、

- コンパクト星同士の合体は滅多におこらない
- バイナリは3体相互作用で系から打ち出される

というわけで merger 自体が稀

理論はともかく

観測的にギャップがあるのが問題: やはり完全に空中楼閣を作るのは(よほど物理が単純でないと)難しい。

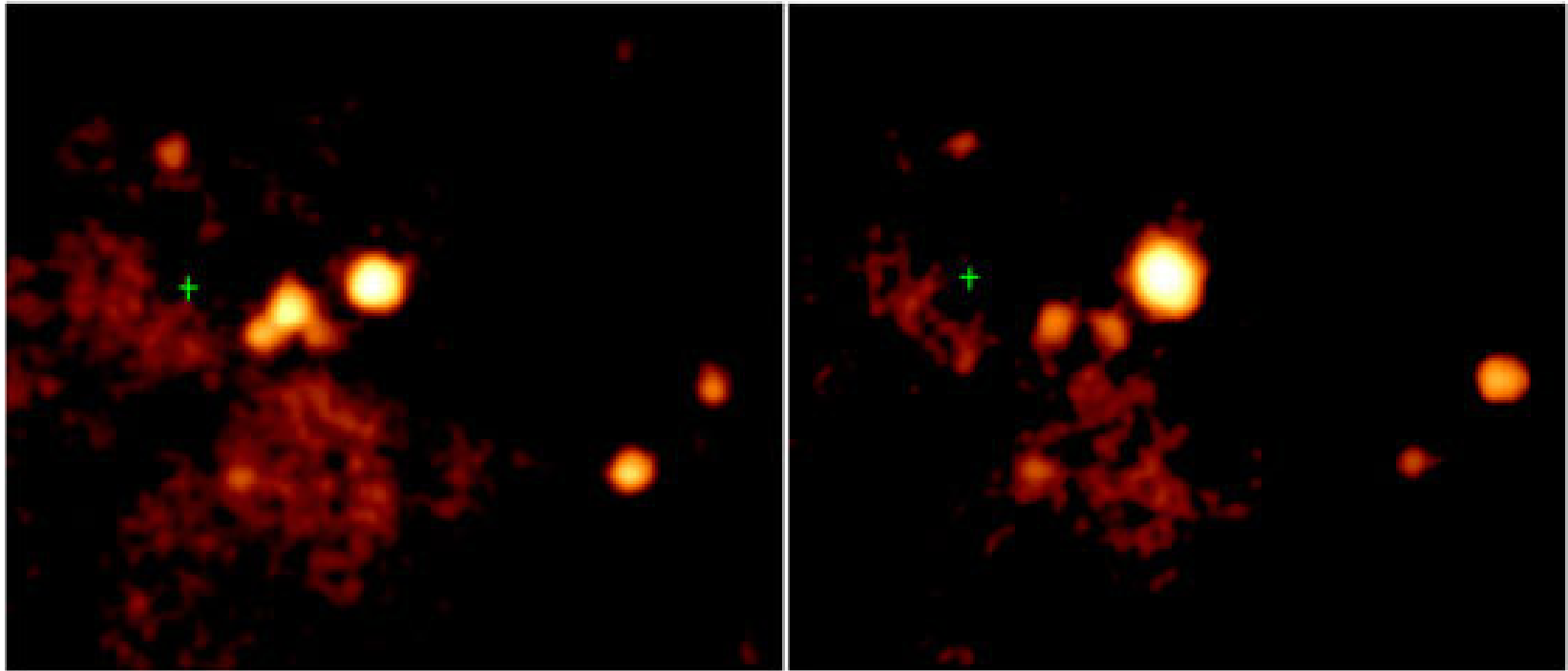
観測的なギャップ

- 恒星質量 BH $\sim 10M_{\odot}$
- 超大質量 BH $> 10^6 M_{\odot}$

中間は ???

M82 の中間質量 BH 候補

Matsumoto *et al.* ApJL 547, L25



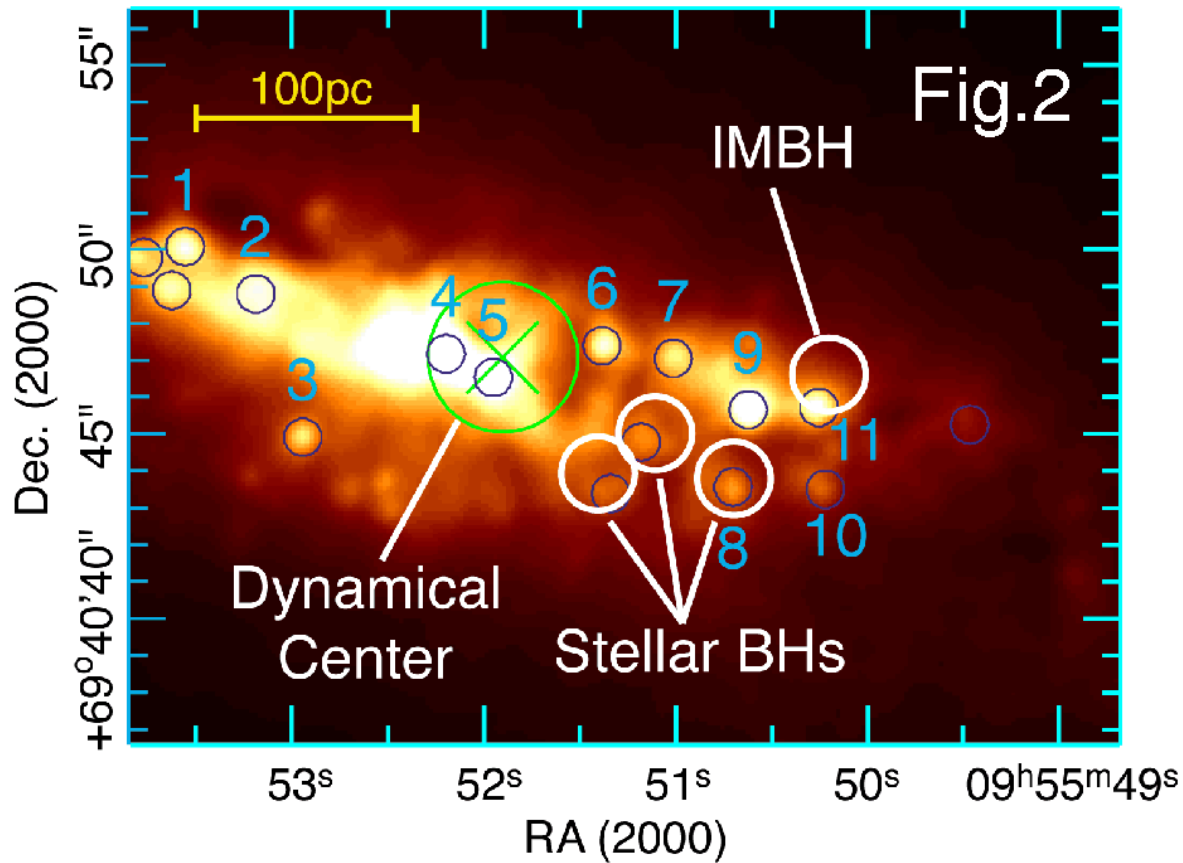
大きな時間変動を示す複数のソース

M82 IMBH (候補) の意味

- **最初の** (でもって依然唯一の) 質量が $\gg 10, \ll 10^6$ の BH 候補天体
- エディントン質量 $\sim 700M_{\odot}$ = 最初の IMBH (intermediate-mass BH).
- M82 の中心から 200 パーセクくらい離れている: 銀河中心の BH そのものではない

赤外線での対応天体

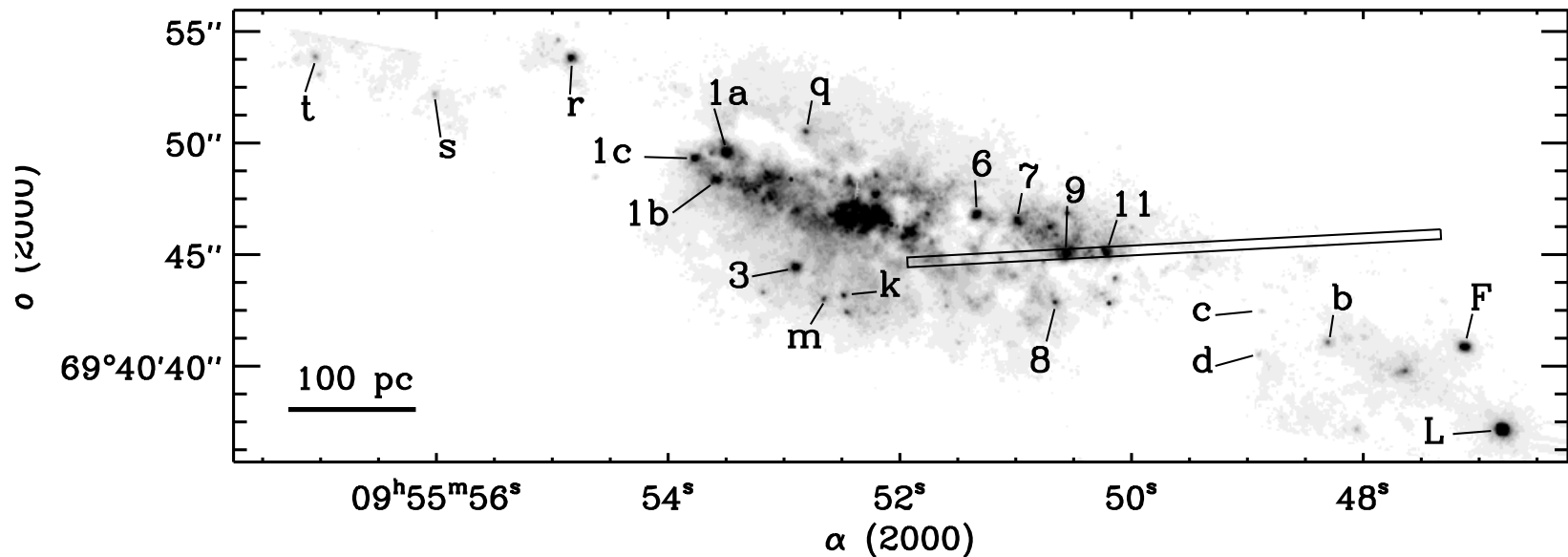
M82 のすばるによる観測 (K' band)



赤外線での対応天体 (2)

HST NICMOS/Keck NIRSPEC

McCrady et al. (astro-ph/0306373)



スターバーストで最近出来た非常に若い星団。

IMBH は星団の中にある？

(理論家の目には) IMBH は若くてコンパクトな星団の中にあるというのは「明らか」。

では、IMBH はどうやってできたか？

How IMBHs were formed?

- 星団と同時に出来た？(あんまりありそうにない)
- 星団の中で作られた。

ホスト星団の力学的な特徴

McCrady et al. 2003 (astro-ph/0306373)

Cluster #11 (MGG-11)

- $\sigma_r = 11.4 \pm 0.8 \text{ km/s}$
- half-light radius $1.2 \pm 0.17 \text{ pc}$
- kinetic mass $3.5 \pm 0.7 \times 10^5 M_\odot$
- Age $\sim 10 \text{ Myrs.}$

M/L が割合低い (軽い割に明るい)

緩和時間非常に短い ($< 10 \text{ Myrs}$)

一つの可能なシナリオ

1. 星団の中心で星の暴走的な合体で大質量星ができる
2. この星のコラプスで IMBH (の種) ができる
3. この IMBH (の種) がさらに他の星と合体して成長

シミュレーション

初期条件

- King model with $W_0 = 7-12$
- Salpeter IMF (as suggested by McCrady et al)
- Star-by-star simulation for MGG-11 (MGG-9 is scaled)

結果

$W_0 \geq 8$ なら暴走的合体 (MGG-11 では)

MGG-9 (緩和時間長い) では暴走的合体はおきない

結果のまとめ

緩和時間が短く、かつ初期に小さいコアを持つ必要がある
(微妙に理屈にあってない、、ふってないパラメータのため?)

暴走的合体

基本的には、ダイナカルフリクションの時間スケールが大質量星の寿命より短いなら暴走的合体はほぼ必然的に起きる。

暴走的合体を起こした星は(多分)そこそこ大きな BH、例えば $100\text{--}1000 M_{\odot}$ になるであろう。

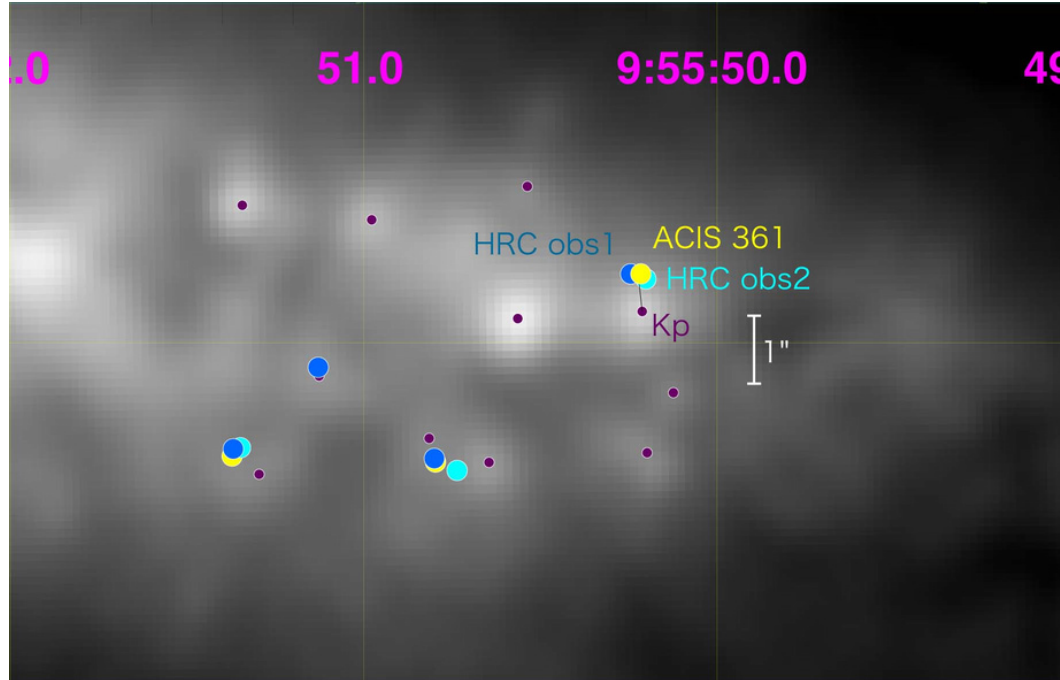
定量的な結果は主系列での質量放出やブラックホールになる質量の割合による。

IMBH 形成についてのまとめ

- 暴走的な合体による IMBH の形成は、理論/数値実験の結果を見る限りありそう。
- 暴走的な合体が起きる条件は星団の緩和時間が短く高密度なコアを持つこと

少なくとも、M82 の星団の中にある IMBH 候補を説明する極めてもっともらしくモデルではある。(他になんかあるわけでもない)

IMBH は本当に星団の中にあるのか？



鶴 (BH2003
talk)

2MASS のソースと
Chandra のソースを
重ねると、M82-X1 は
MGG11 から $0''.6$ ず
れてる。

**Radiation recoil で打ち出されたという可能性だってあ
るが、、、**

IMBH と SMBH の関係

1. 無関係？

2. 同じようにできた？

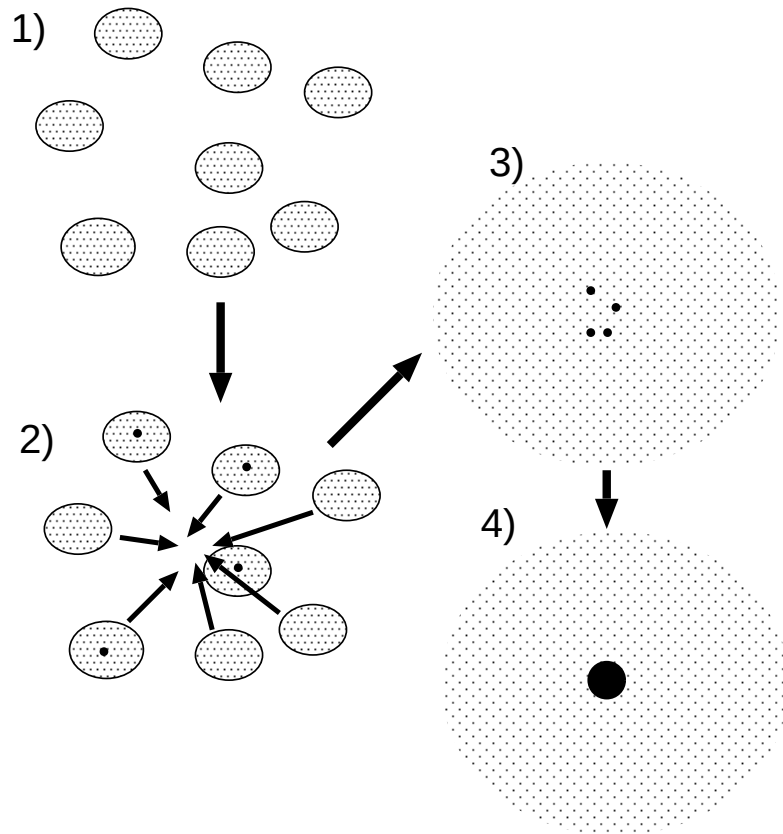
- SMBH の成長時間長すぎる Growth timescale would be too large

3. SMBH を IMBH から作る？

- タイムスケールの問題を解決できる (かも)

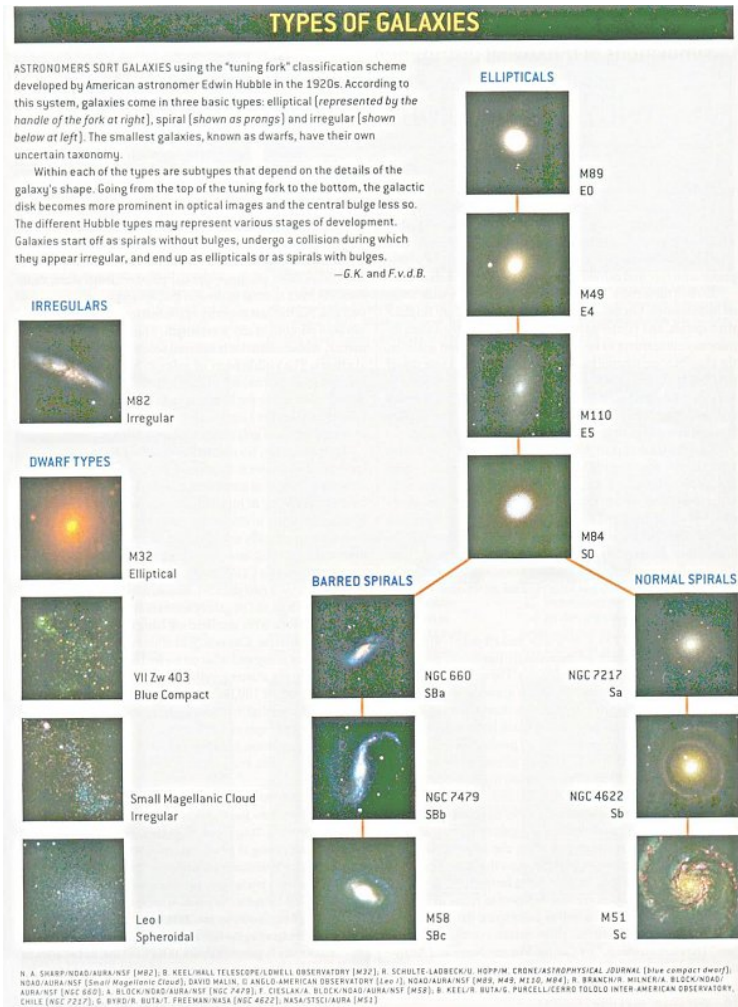
Merger シナリオ

Ebisuzaki et al. 2001 ApJ 562, 19L



1. スターバーストで大量に星団を作る
2. いくつかの星団では IMBH ができる。多くの星団はダイナミカルフリクションで中心に沈む。
3. 星団は潮汐破壊。IMBH は中心に残る。
4. 複数の IMBH は星や他の IMBH との相互作用で連星になり、重力波で合体するところまでハードになる。

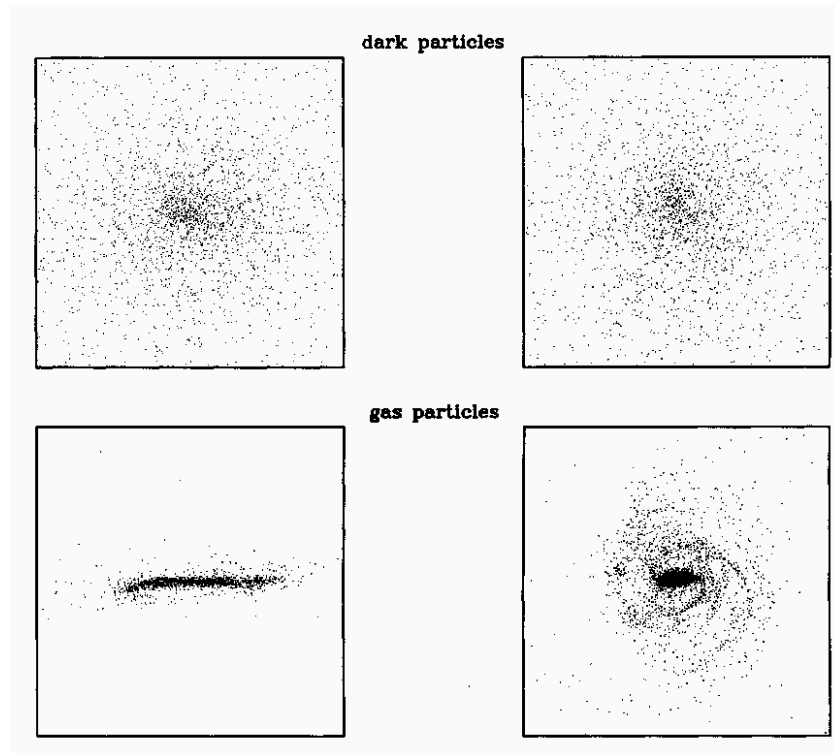
銀河形成シミュレーション



基本的な考え方:

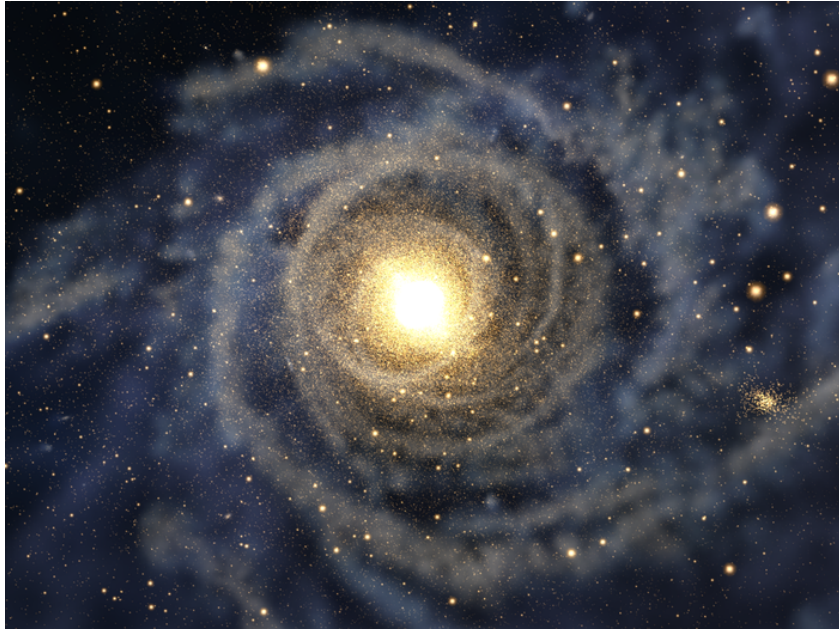
- 初期条件からの、銀河の「まると」シミュレーション
- 銀河の多様性の起源を理解したい

Katz and Gunn 1992



- **ダークマター+ガス+星**
- **1 万粒子くらい、 Cray YMP で1000時間くらいの計算**
- **1 粒子の質量: 1000 万 太陽質量くらい**

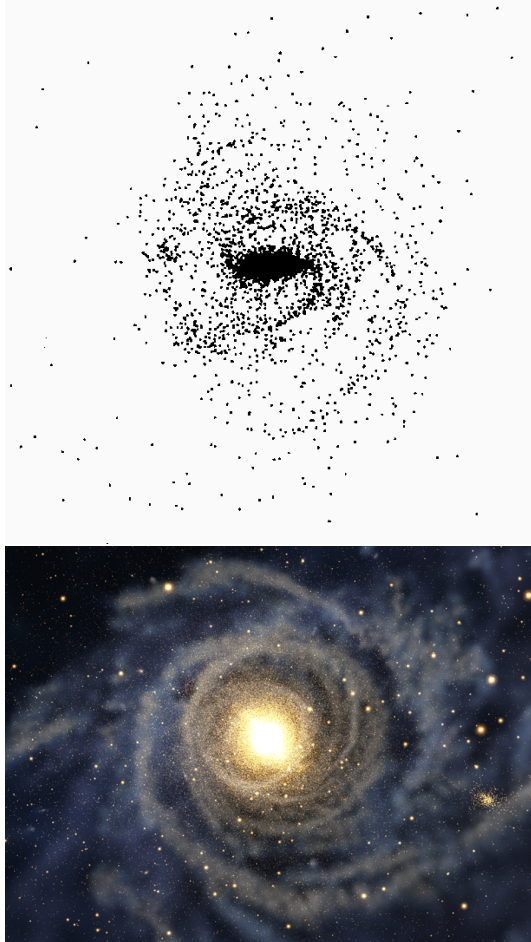
Saitoh et al. 2005



animation

- **ダークマター+ガス+星**
- **200万粒子、GRAPE-5
で1年(!) くらいの計算**
- **1粒子の質量: 1万 太陽
質量くらい**

分解能を上げるといいことがあるか？



- そうでもない？
- 大事なこと:物理過程のより適切な扱い
 - 星形成
 - 超新星爆発からのエネルギーインプット

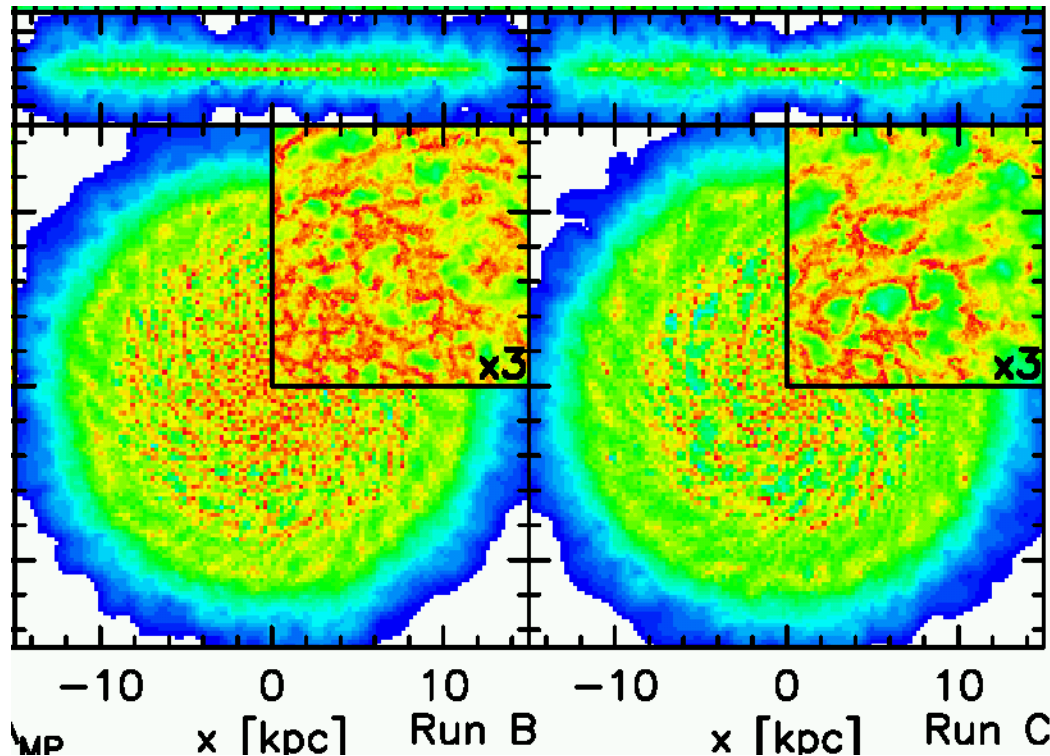
星形成過程のモデル

- 本当に星 1 つを作るシミュレーション: 分解能が太陽質量より 4-5 桁高い必要あり
- 現在できる限界: 粒子の質量が太陽の 1000 倍。8 桁くらい足りない
- 星ができる過程のモデルが必要
 - ガスが十分に低温・高密度になったら、星に変わる、とする
 - いくつかフリーパラメータがある
 - できる銀河の構造がパラメータのとりかたによってしまう、、、
- 超新星の扱いにも同様な問題

どれくらいの分解能でどうすればいいか？

- 答があうようになったらわかる？
- ガス粒子が星形成領域や分子雲より大きいようでは多分駄目
- 理論的には、十分な分解能があれば単純にガスを星に変えるだけでよくなるはず。
- そこに近付いている？
- あと 1-2 桁？

Saitoh et al. 2007



星形成のタイムスケールを 15 倍くらい変えてみた

あんまり大きくは結果が変わらなかった

分解能が低い計算では、星形成のタイムスケールを 15 倍小さくしたら銀河が爆発してしまう。

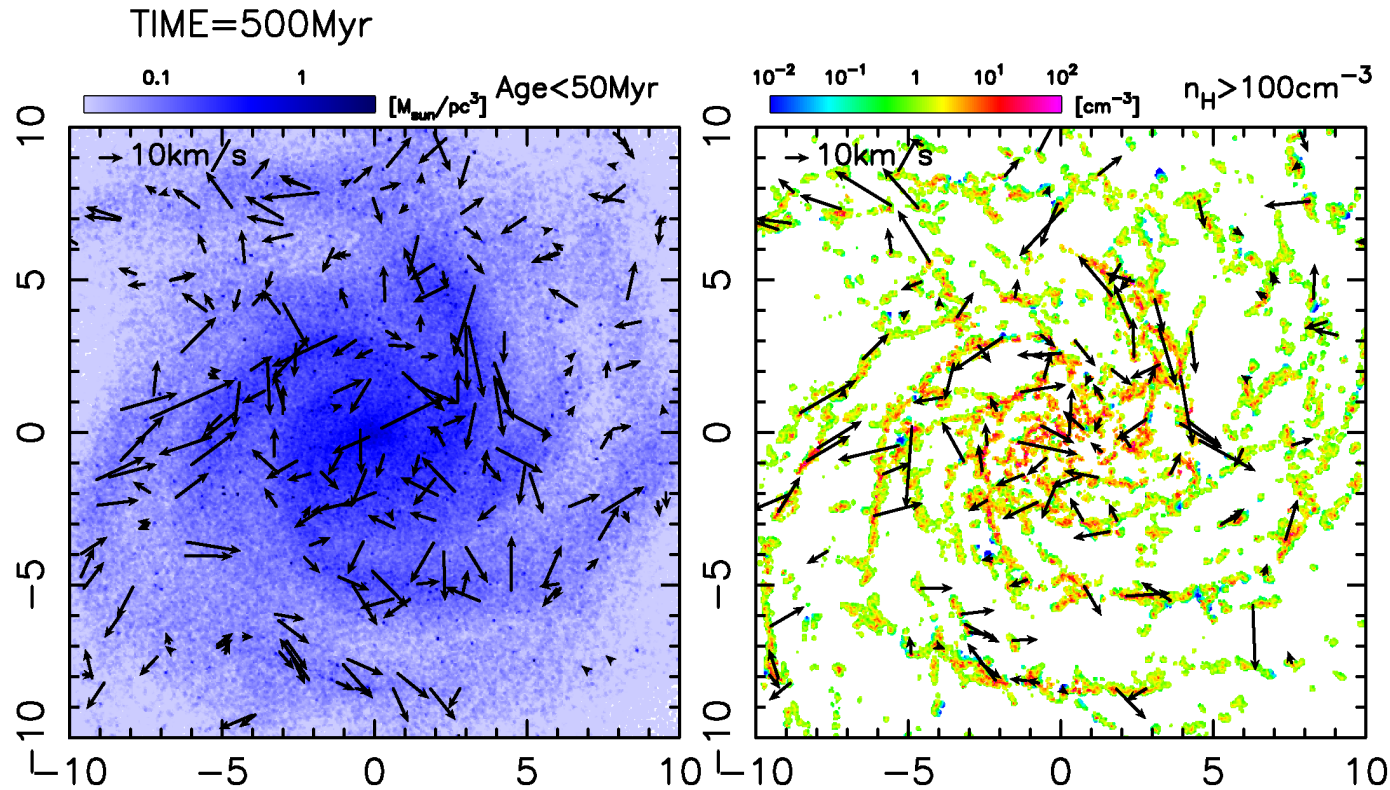
アニメーション

Star formation with SPH

Large scale structure formation with AMR

銀河円盤

渦巻構造と、円運動からのずれ animation (Baba et al 2009) 1 2



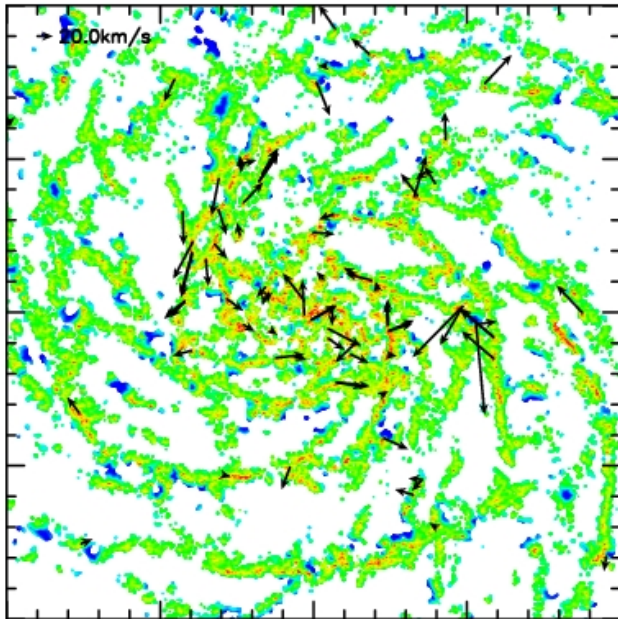
星の分布

冷たいガスの分布

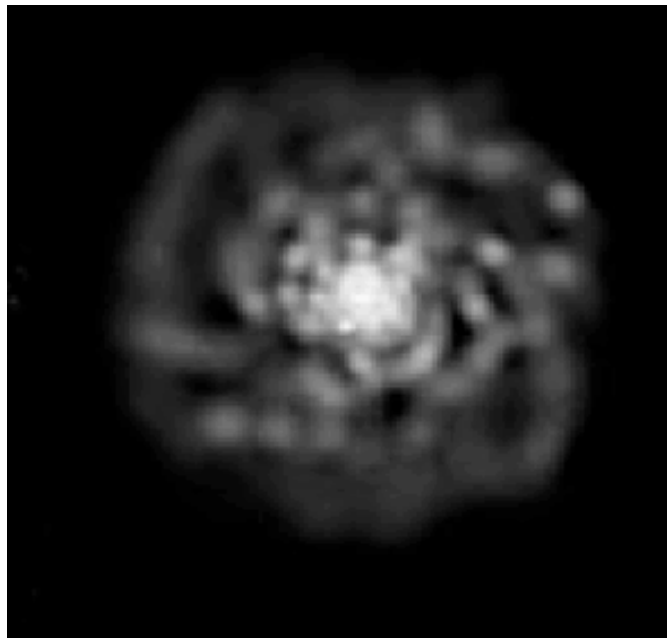
シミュレーションの詳細

- ガスが低温・高密度になるところまで解く
- 多数の SPH 粒子で高分解能シミュレーション
- 計算機には国立天文台の Cray XT4、斎藤貴之さん開発の ASURA コード
- 10pc ソフトニング ($\leftarrow 500\text{pc}$)
- ガスは温度 10K まで解く ($\leftarrow 10^4\text{K}$)
- 粒子質量 $3000M_{\odot}$ ($\leftarrow 10^5M_{\odot}$)

高分解能モデルと観測



低分解能モデルと観測

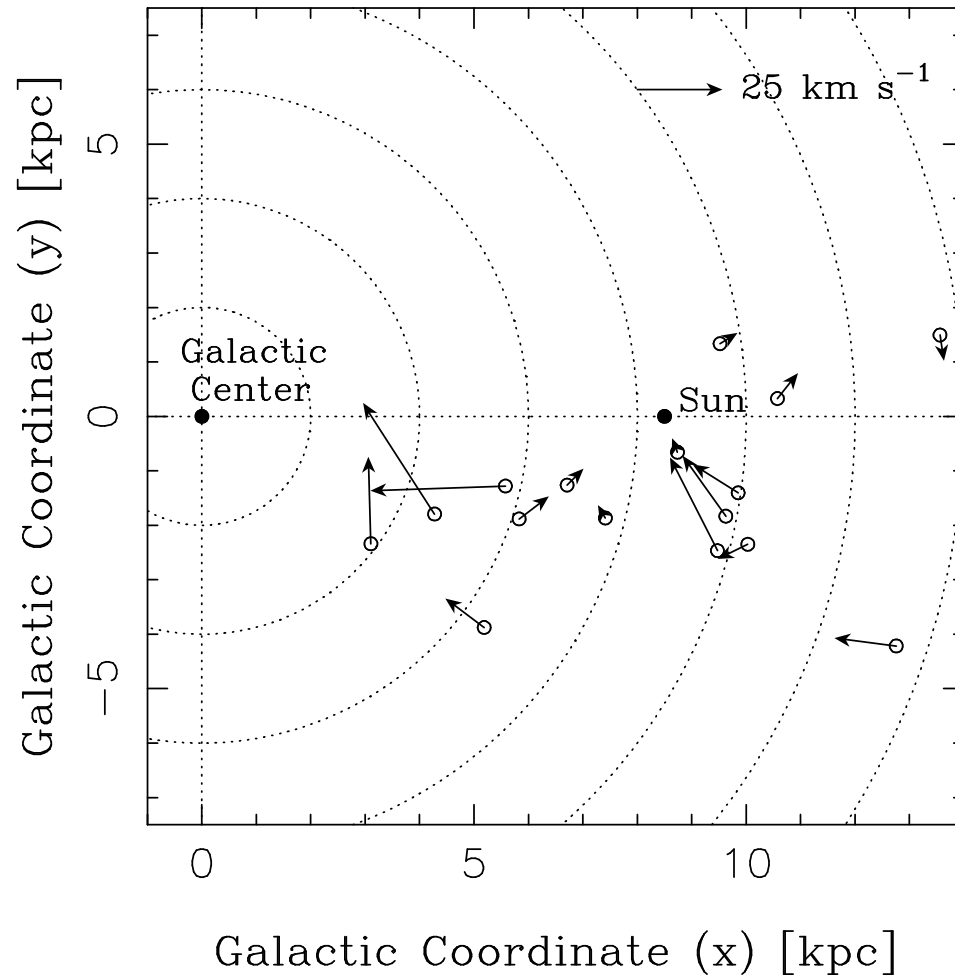


高分解能シミュレーションでわかってきたこと

- 星形成は大きなスケールの渦巻構造と関係
- 観測で見える複数アームがある渦巻は、定常ではなく形成・消滅を繰り返している
- この結果は、星形成のモデルの詳細にほとんど依然しない

電波干渉計による観測

- 2006: Xu et al, Science 311, 54
- Nov 2008: Burst of results from VLBA
- Several data from VERA

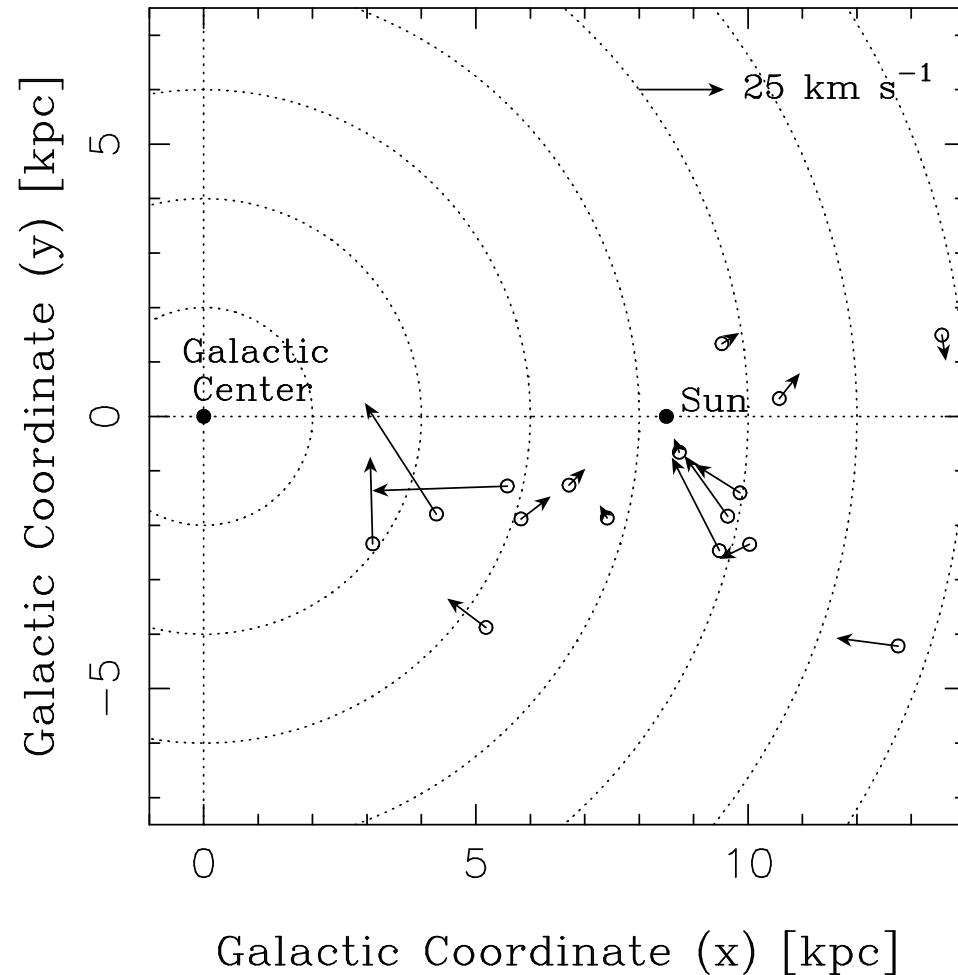


(Compiled by Dr.
Asaki)

電波干渉計による観測

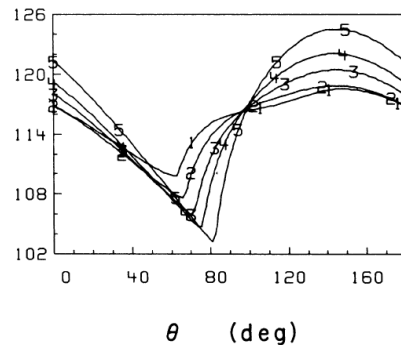
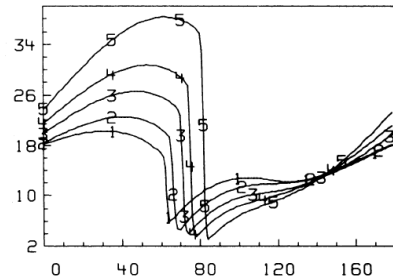
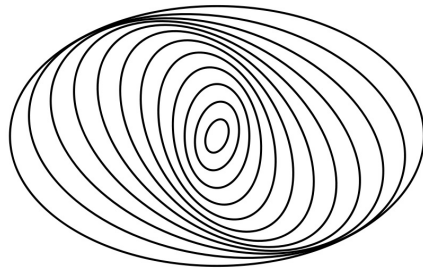
- 円運動からの大きなずれ ($\sim 30\text{km/s}$)
- 空間相関もあり？

このような大きな運動の起源は？



教科書に書いてあること

定常密度波

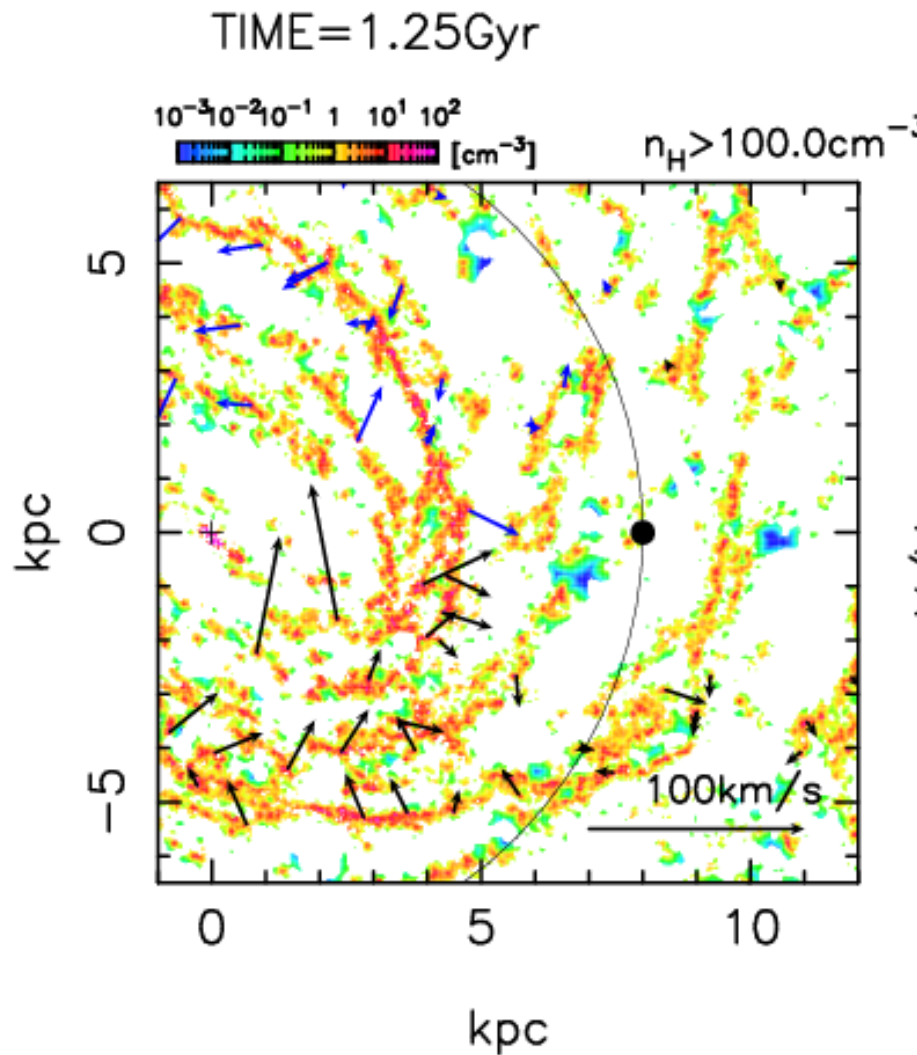
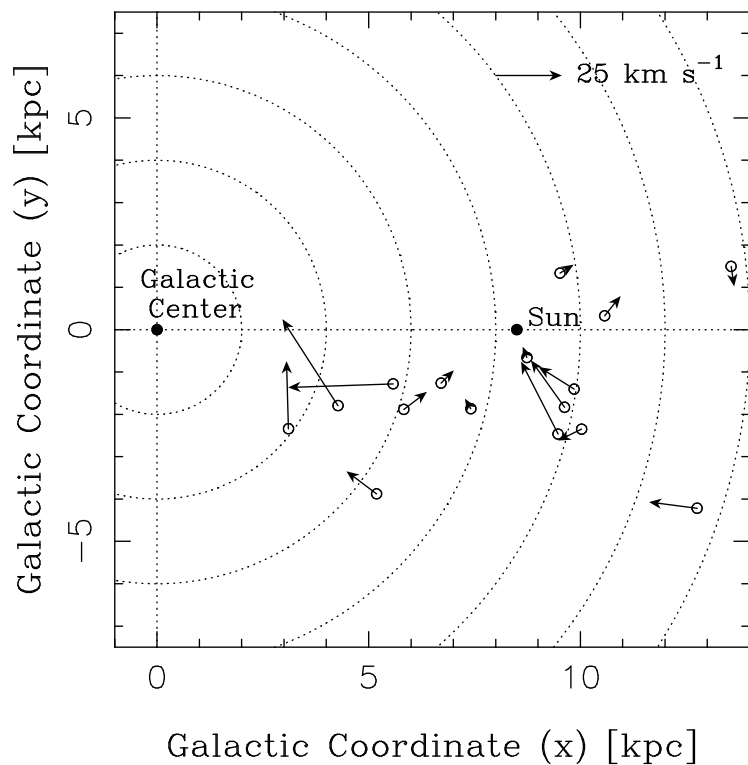


- 渦巻構造は実体ではなく、密度波
- ガスは、渦巻が作るポテンシャルの底を通る時に圧縮されて、そこで星を作る
- 星やガスの円運動からのずれはごく小さい

観測ともシミュレーション結果とも全然あってない、、、

比較

観測とシミュレーション

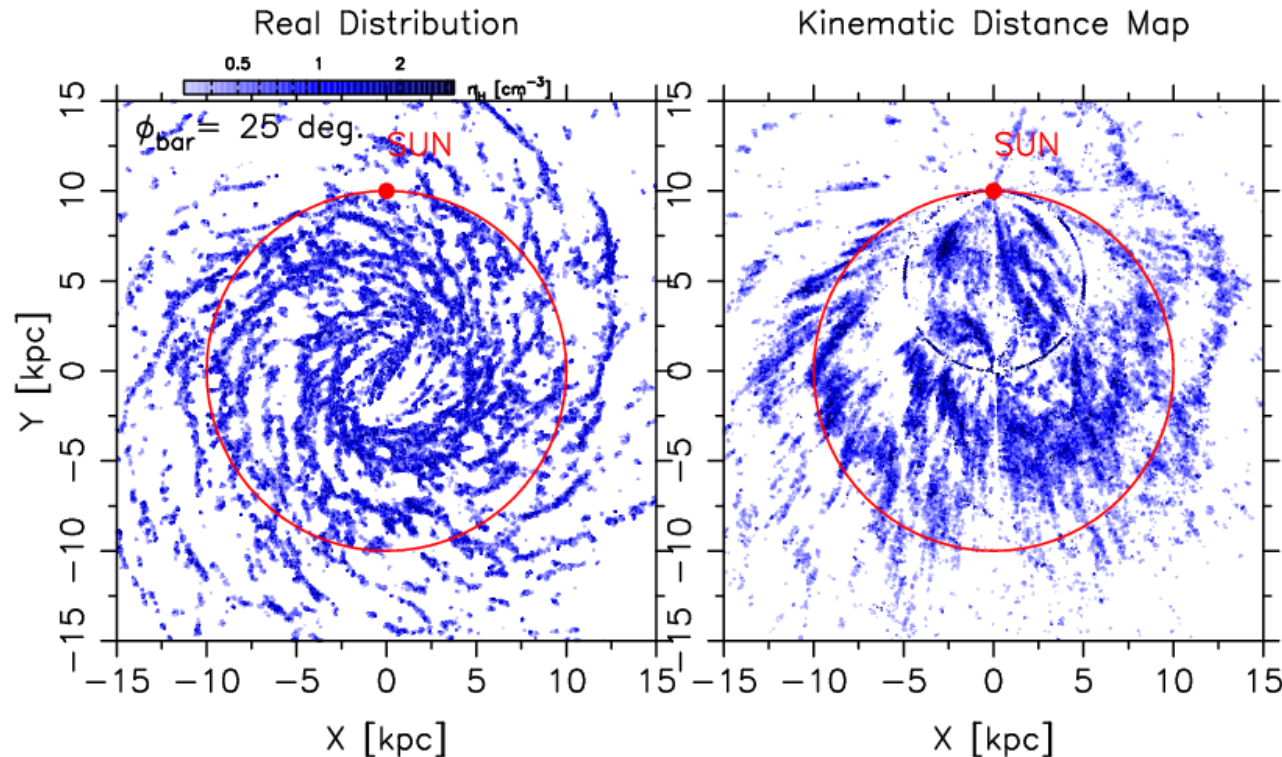


似ているような気が？

運動学的距離

TIME=2.00Gyr GAS ($T=10^{1.5}-10^{2.5}\text{K}$ $n_H=10^{-0.5}-10^{0.5}\text{cm}^{-3}$)

SUN : Pos=(0.0,10.0)[kpc] Vel=(169.5,0.0)[km/s]



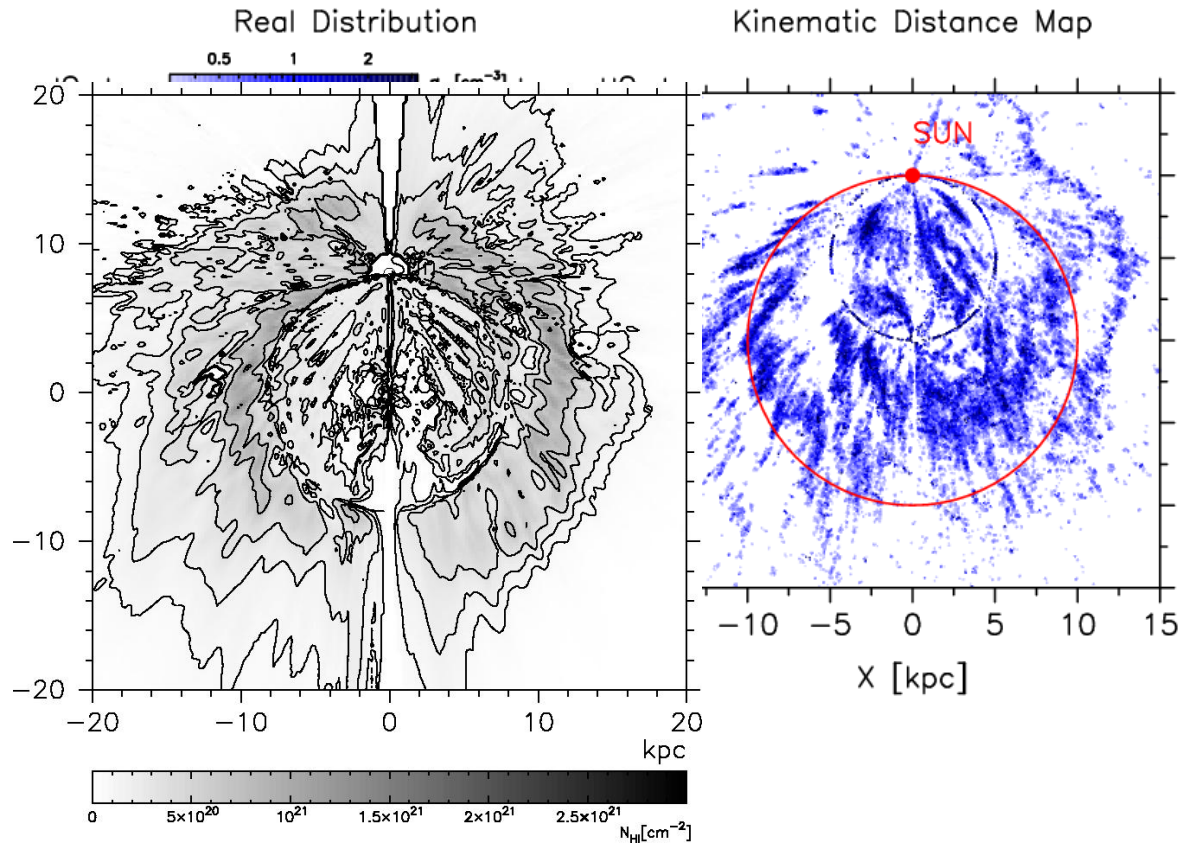
「円運動をしている」と仮定すると、速度の観測から距離が求まる

シミュレーション結果を観測すると、、、、

運動学的距離

TIME=2.00Gyr GAS ($T=10^{1.5}-10^{2.5}\text{K}$ $n_{\text{H}}=10^{-0.5}-10^{0.5}\text{cm}^{-3}$)

SUN : Pos=(0.0,10.0)[kpc] Vel=(169.5,0.0)[km/s]

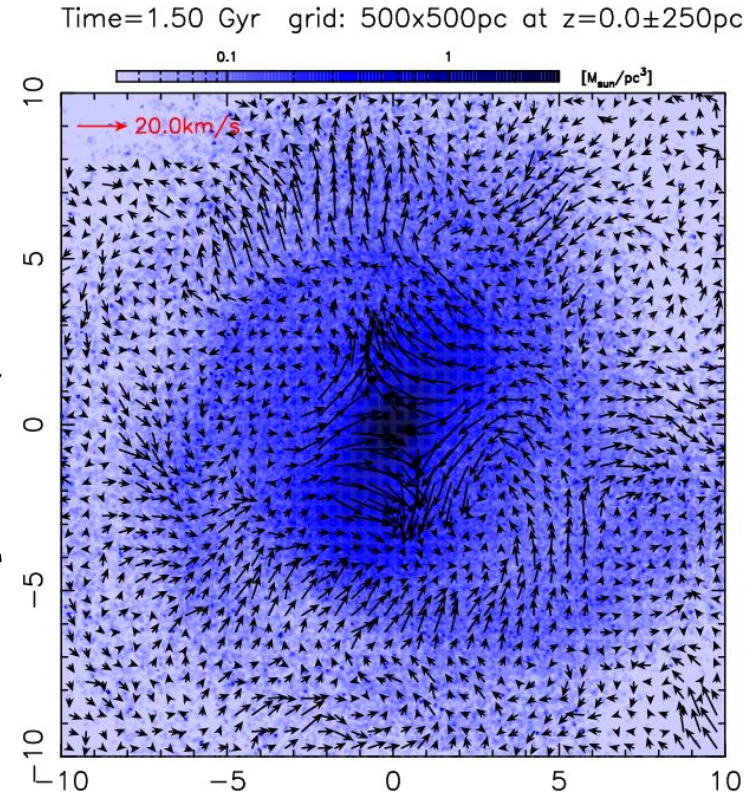


観測 (左) とシミュレーション (右) を比較すると、同じような構造

星のスパイラルの運動

星の運動の円運動からのずれ

- スパイラルアームは実体、密度波ではない
 - 古い星の平均の円運動からのずれも結構大きい
 - キロパーセクスケールの構造がある



ガス＋星の銀河円盤シミュレーションのまとめ

- 高分解能計算ではスパイラルアームは自然にできる
- アームは定常ではなく、常に生成消滅している
- シミュレーション結果を「観測」すると、我々の銀河系の観測の色々な特徴を再現できる

星だけの円盤

(Fujii et al. 2010)

animation a1

animation a2

animation b1

- Stable against radial mode (a1, a2)
- Spiral arms form
- They seem to be maintained for very long time

計算機の話

このような研究：

- できるだけ沢山の粒子を使って
- できるだけ長い時間
- できるだけ正確に

計算するのが大事。というわけで、

- 速く、正確に計算できるような方法を考える
- 新しい、速い計算機に合わせた方法を考える
- それでも足りなければ計算機を作る

速い計算機を使う

計算法の話は少ししたので、これははしょって後の2つ。

速い計算機とはどんなものか？

普通のパソコンと スーパーコンピューター
なにが違うか？

昔は随分違った。

昔の「速い計算機」

30 年前

- パソコンはなかった。
- 同じプログラムでも高い計算機のほうが速かった

20 年前

- パソコンはあったけど、同じプログラムで高い計算機の1000 倍とかそれ以上時間が掛かった（値段もそれくらいではあった）
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」というものに変わってきて、特別な工夫をしてプログラムをかかないと性能がでなくなった。

今の「速い計算機」

10年前

- パソコンが非常に速くなってきた
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」がさらに
沢山並んだ並列計算機になってきた。

今

- パソコンはもっと速くなった。
- ベクトルプロセッサを並列に使うより、パソコンを並列に使う方がずっと安くて速くなってきた。

例：

**東大「スーパーコンピュータ」 148Gflops ×
952台**

値段は数10億円

普通のパソコン 1台 40 Gflops 10万円

値段あたりの性能を計算してみると、、、

プログラムにはいろいろ難しいことを考えないといけない。

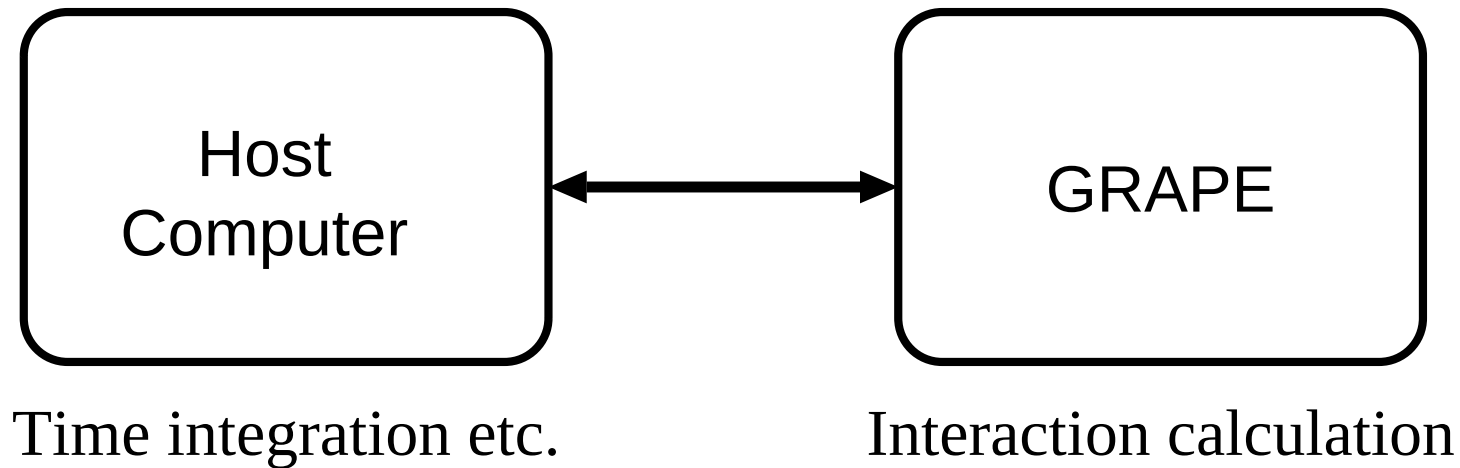
- **計算機どうしが通信すると時間が掛かる。**
- **もっと細かい話いろいろ。**

計算機を作る？

- 計算機のなにもかもを全部作るのは大変
- 計算時間のほとんどは粒子間の重力の計算（計算法によってはちょっと違うけど、、、）

重力の計算だけ速くする計算機を考える
(GRAVITY PIPE, GRAPE)

GRAPE の基本的考え

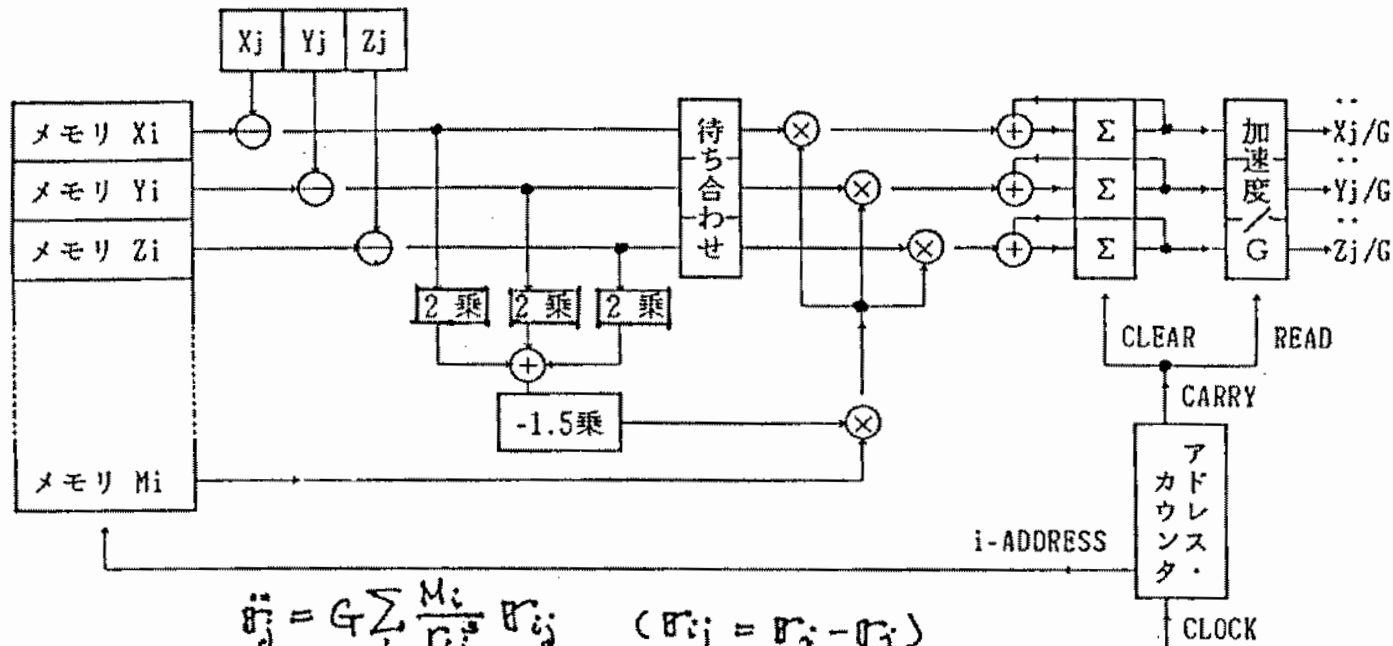


専用ハード：相互作用の計算
汎用ホスト：他のすべての計算

専用ハードウェア

- 相互作用計算のための専用パイプラインプロセッサ
 - 多数の演算器を集積可能
 - すべての演算器が常時並列動作
 - 非常に高い性能
- すべてハードウェア → ソフトウェア不要

GRAPE パイプライン



+, -, ×, 2 乗は 1 operation, -1.5 乗は多項式近似でやるとして 10 operation 位に相当する。
 総計 24 operation.

各 operation の後にはレジスタがあって、全体が pipeline になっているものとする。

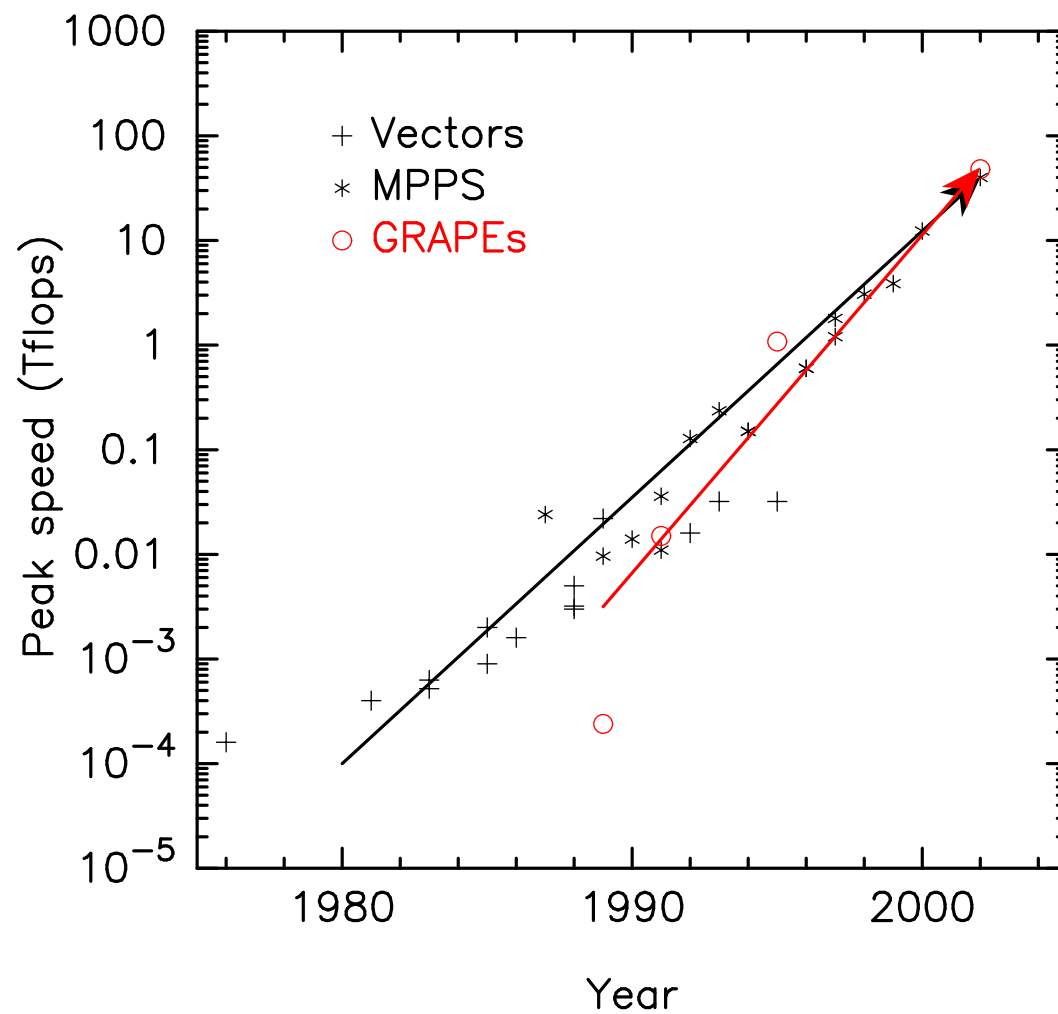
「待ち合わせ」は 2 乗して M と掛け算する間の時間ズレを補正するための FIFO (First-In First-Out memory).

「Σ」は足し込み用のレジスタ。N 回足した後結果を右のレジスタに転送する。

図 2. N 体問題の j-体 に働く重力加速度を計算する回路の概念図。

(近田 1988)

計算速度の発展



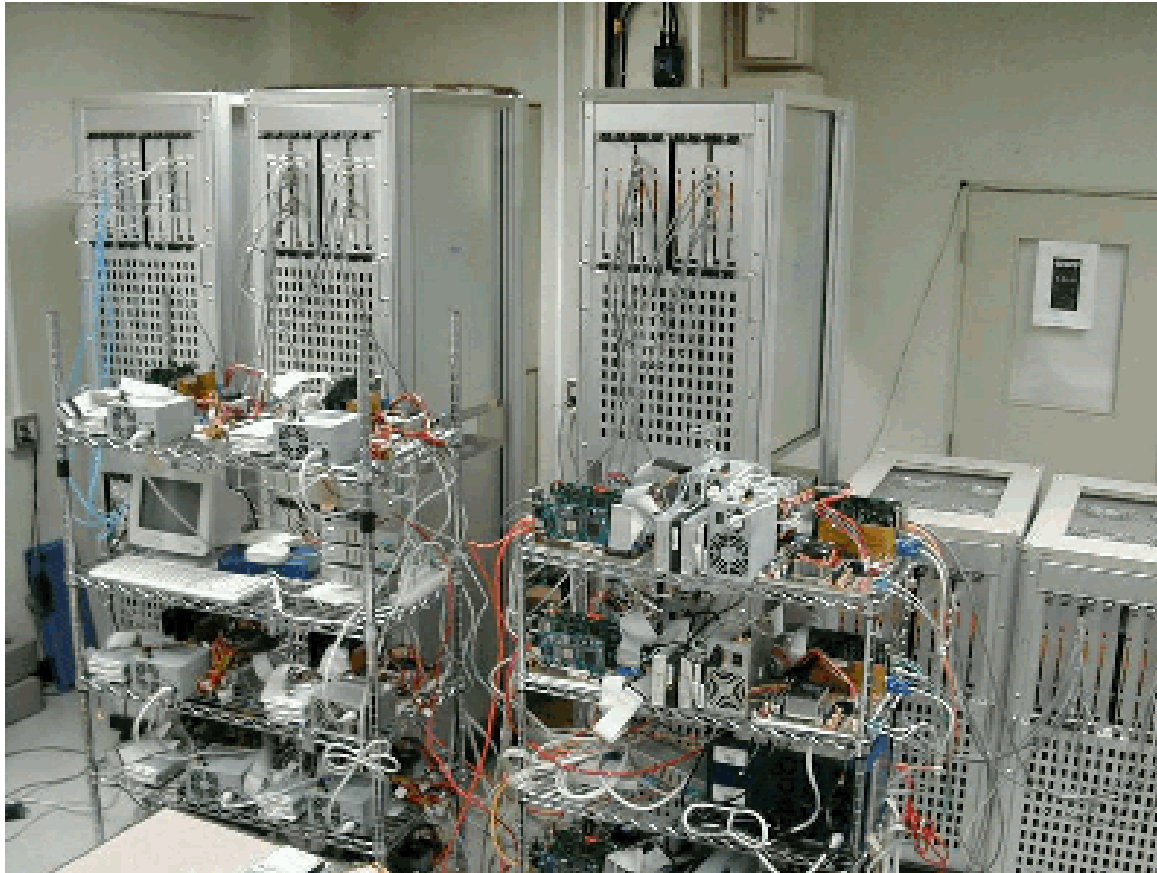
GRAPE-4

1995 年完成、当時世界最高速



GRAPE-6

2002年完成、当時世界最高速



GRAPE の成果

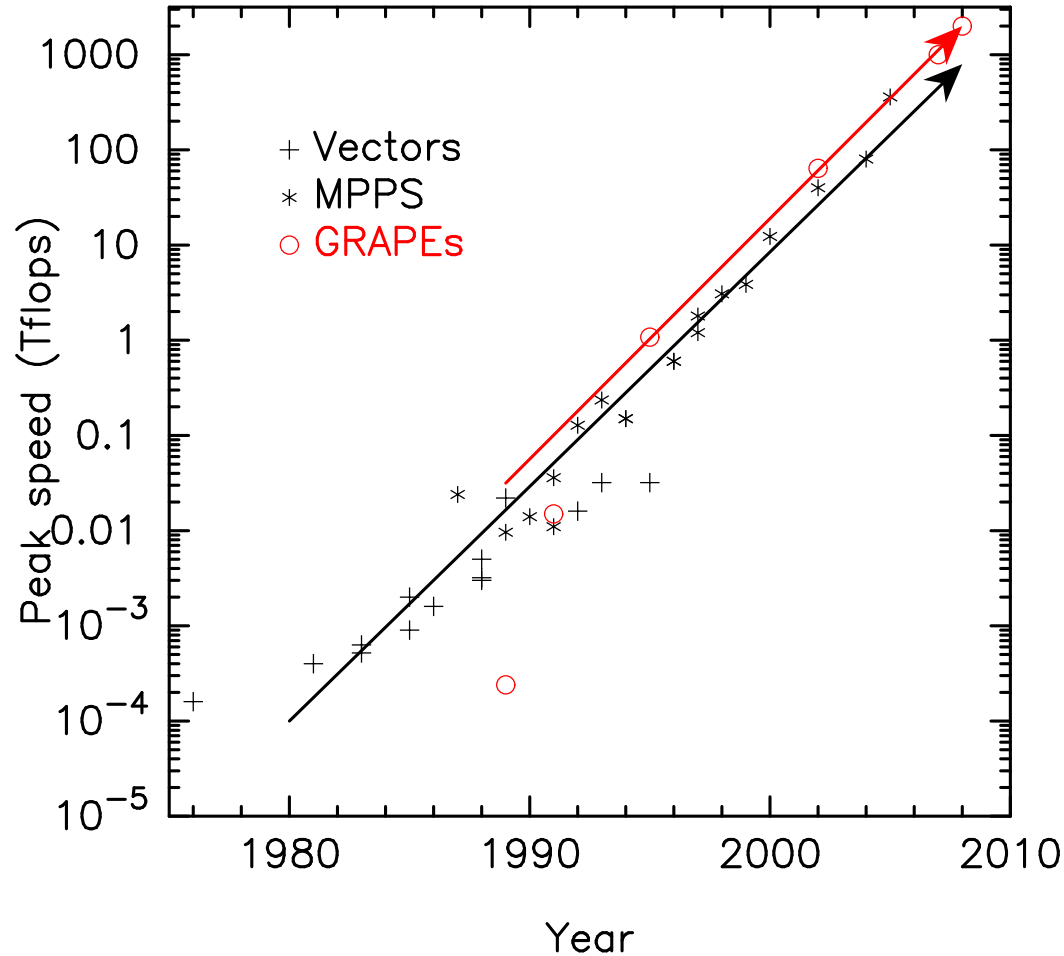
この講義で紹介したいろいろな計算結果の結構な部分。

本当に新しい研究をするには、人より良い道具を持たないといけない

道具＝ 望遠鏡、人工衛星、計算機、、、（頭）

- 沢山お金を払って良い道具を買ってくる
 - お金を出しても売ってない、、、
- 頭を使って良い道具を作る

GRAPE の性能



GRAPE: 重力相互作用だけ計算する専用計算機。

大変効率は良い。汎用機の 1/100 のコスト。

続ければよいか？

「GRAPE-6 後継」の実際的な問題

天文だけ (しかも理論だけ (しかも軌道計算だけ)) の機械
としては開発にお金がかかりすぎる

プロセッサ回路開発費

1990	1 μ m	1500万円
1997	0.25 μ m	1億円
2004	90nm	3億円以上
2010	45nm	10億円以上

普通の計算機より速いとはいえ、そもそも高すぎる、、、

ではどうするか？

GRAPE-DR でのアプローチ

- 若干妥協して、ある程度色々できるようにする
- で、大きな予算を獲得する

計算設計としてのアプローチ:

小さくて単純だが、色々できるプロセッサをなるべく沢山詰め込む

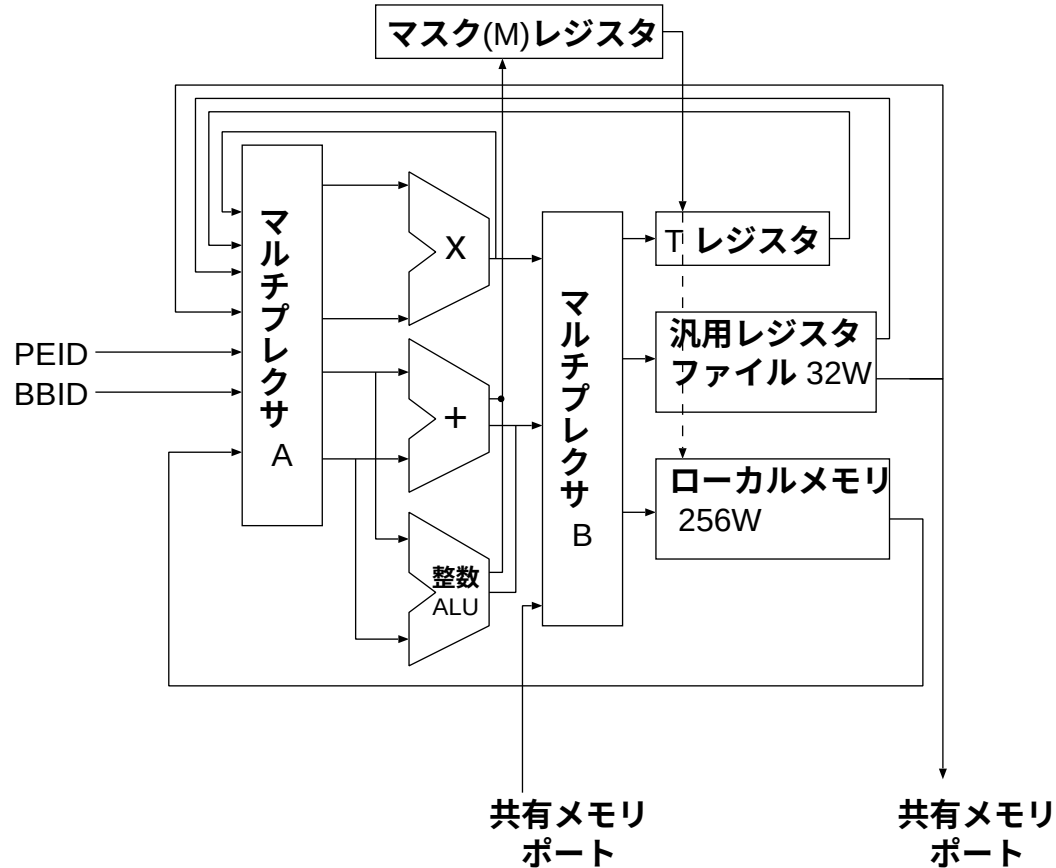
基本的な計算モデル

$$R_i = \sum_j f(x_i, y_j)$$

を並列に評価。

- 2重ループ、一方について積算。
- y_j がなければ単純な並列計算。
- 行列乗算もできるように作る。

GRAPE-DR プロセッサの構造



- 浮動小数点演算器
- 整数演算器
- レジスタ
- メモリ 256 語
(K とか M ではない。)
- これを 512 個 1 チップに入れる

プロセッサチップ

チップ写真



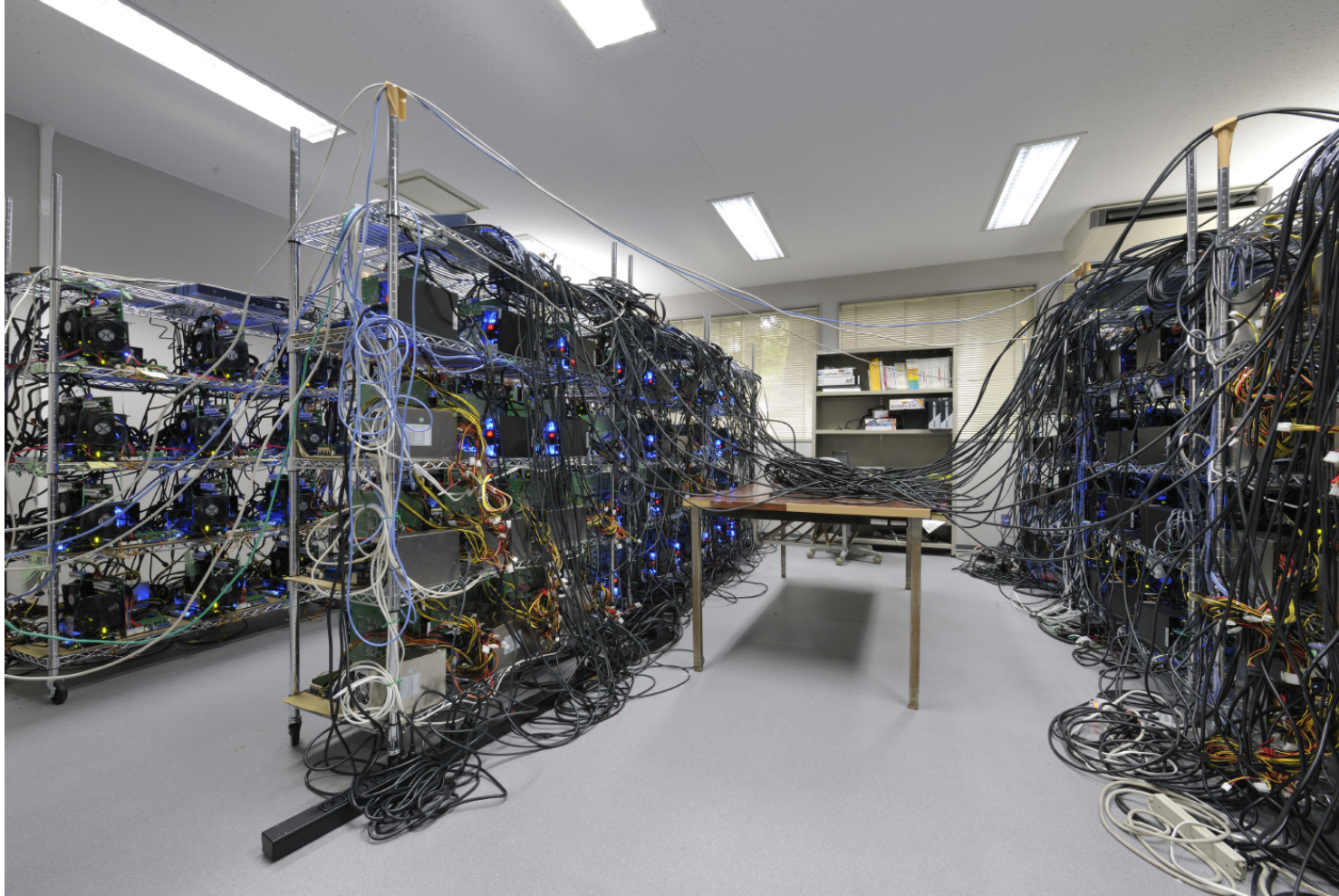
プロセッサボード



普通のパソコンにつく PCIe
ボード

- 200-250W
- 400-433MHz クロック
- 820-887 Gflops
- 普通のパソコンの 20 倍
程度の性能

GRAPE-DR クラスタシステム

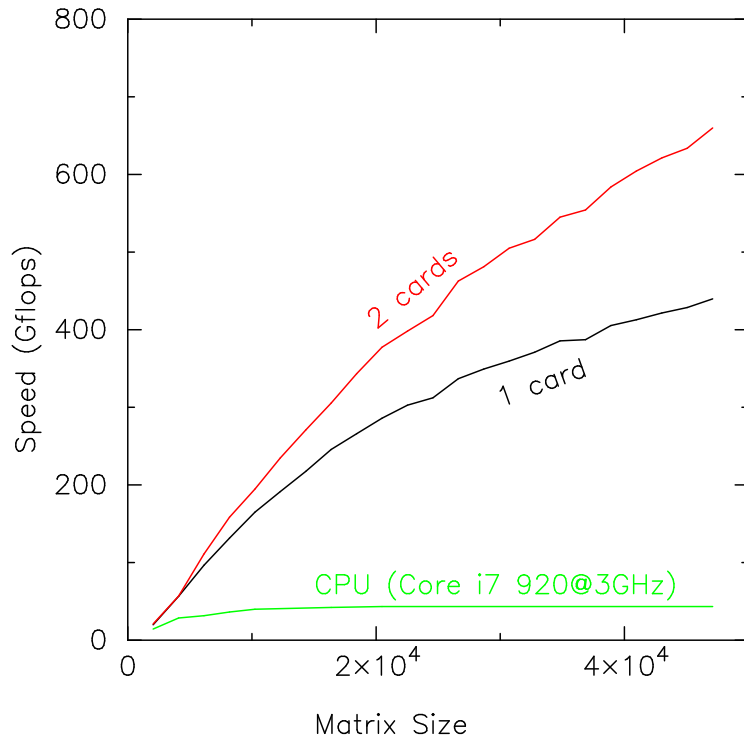


GRAPE-DR クラスタシステム

前のスライドの写真とった時の構成:

- 128-ノード, 128-ボード (105Tflops peak)
- ホスト計算機: Intel Core i7+X58 12-24 GB メモリ
- ネットワーク: x4 DDR インフィニバンド

LU 分解の性能



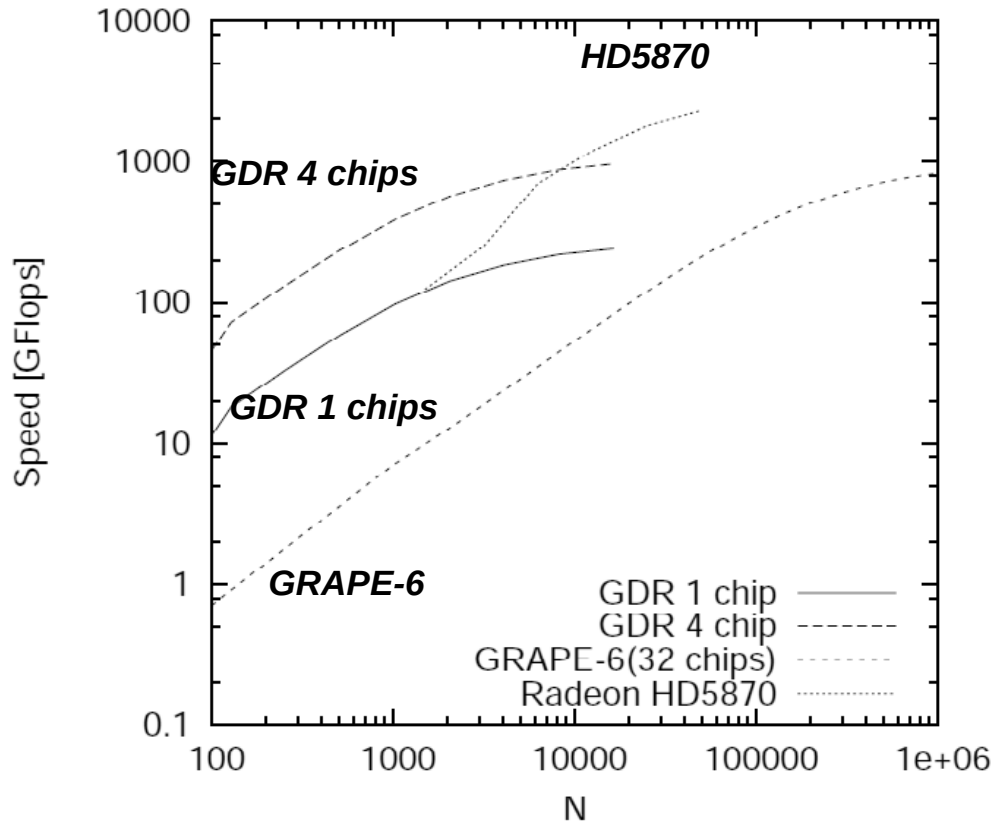
行列サイズの関数としての
速度

行列がメモリー一杯のところで
430Gflops(1 カード)、及び
670Gflops(2 カード)

カード 1 枚でホスト CPU の
11 倍

(天河 1A: ホスト CPU の 2 倍ちょっと)

重力計算性能



Performance for
small N much
better than GPU

(for treecode, the
multiwalk method
greatly improves
GPU
performance,
though)

Little Green 500, June 2010

Green500 Rank	MFLOPS/W	Site*	Computer*	Total Power (kW)
1	815.43	National Astronomical Observatory of Japan	GRAPE-DR accelerator Cluster, Infiniband	28.67
2	773.38	Forschungszentrum Juelich (FZJ)	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
2	773.38	Universitaet Regensburg	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
2	773.38	Universitaet Wuppertal	QPACE SFB TR Cluster, PowerXCell 8i, 3.2 GHz, 3D-Torus	57.54
5	536.24	Interdisciplinary Centre for Mathematical and Computational Modelling, University of Warsaw	BladeCenter QS22 Cluster, PowerXCell 8i 4.0 Ghz, Infiniband	34.63

電力当りの性能で、世界一を達成

#2: IBM PowerXCell, #9: NVIDIA Fermi

他の計算機に比べてどうか？

プロセッサだけで、電力当り性能でみると

プロセッサ	設計 ルール (nm)	電力当り 性能 (GF/W)
GRAPE-DR	90	4.1
GRAPE-6	250	3.24
Tesla C2050	40	2
Xeon 5680	32	0.6
「京」	45	2

- GRAPE-DR は良いことは良いが、10年前の GRAPE-6 と大差ない
- GRAPE-6 同様の専用回路なら 10倍くらいよくできた

今後の方向

- 電力の問題は深刻: 「京」は 30 メガワット
- GRAPE-DR のような方向は、汎用プロセッサを使うよりはずっといい
- でも、本当に効率がいいのはやはり完全に専用回路化すること
 - FPGA
 - 構造化 ASIC

まとめ

- 天文学研究では「計算」はとても大事
- 専用計算機を作ると、同じコストで計算機を買ってくる
のとはできないことができる
- とはいえ、時代が変わると作り方も変える必要があるの
かも、、、

おまけ — 2 位じゃだめなんですか？

解説的な何か:

- 「京」のプロセッサ等の開発は去年春でおわっていて、問題になっていたのは完成をちょっと早くするために 100 億円追加要求していた分。
- 半年は計算機の性能としては 30% にあたる、という考え方からは、300 億追加しても半年速くできるなら意義あり。
- とはいえ、元々 1100 億はちょっと高すぎるのでは、という話も。

事務連絡：

レポート課題

以下のどれかについて、 A4 レポート用紙 1 枚程度（1000 字程度）に説明をまとめて提出せよ。

1. 太陽系の安定性
2. 力学平衡
3. 重力熱力学的不安定
4. Green 500

レポート提出期限は 12/24 である。