重力多体系の数値計算法

牧野淳一郎
東京大学理学系研究科天文学専攻

平成 14 年 12 月 9 日

この講義の目標

- 古典多体問題の数値計算法の概観
  - 「多体問題であること」によるもの
  - ハミルトン系であることによるもの
  - 「重力」多体系であることによるもの
- 系の物理と数値計算法の関係の理解
- 「道具」であるところの計算機の理解

といったような問題を扱ってみたい。

大体の講義計画

- 初めに:何が問題か？
  - 多体計算一般の問題
  - 重力多体系の特性
- 多体系の数値積分
  - 常微分方程式の数値積分法
  - 独立時間刻みと関係する話題
  - 粒子間相互作用の高速計算アルゴリズム

大体の講義計画 (続き)

- 多体計算と計算機ハードウェア
  - 高速計算機の歴史
  - 並列計算機
  - 専用計算機
- まとめと今後の方向

初めに:何が問題か？

- 多体計算一般の問題
  - 多体問題とは?
  - 計算によってなにを理解したいか？
  - 計算量
  - 計算精度
- 重力多体系の特性

多体問題とは?

多体系の運動方程式：

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{f}_{ij} \tag{1}$$

$\boldsymbol{x}_i$ と m_i は粒子 i の位置と質量、 $\boldsymbol{f}_{ij}$ は粒子 j が粒子 i に及ぼす力。

重力多体系なら $\boldsymbol{f}_{ij}$ はニュートン重力

$$\boldsymbol{f}_{ij} = -G m_i m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}, \tag{2}$$

G は重力定数。

が、この式をじっとみていてもほとんど何もわからない。

分からない理由

(極めて特別な場合を除いては)

運動方程式が解析的に解けない。

もちろん、解ける場合や、近似的に解ける場合というのはいっぱいある。

- ニュートン重力での2体問題 (ケプラー問題)
- 特殊な初期条件からの3体問題
- 粒子数無限大の極限での力学平衡解

しかし、解析的には解けなくたって、計算機を使えば数値解は求められる。だから、求めればいいんではないの (何故わざわざ集中講義なんか聞かないと/ やらないといけないの) ?

計算すればなんでもわかるか ?

原理的には答は YES。

現実の問題としては NO。

- 計算機の能力
- 素過程の理解

例:太陽系の進化

太陽+9惑星 (+小惑星群+彗星+カイパーベルト天体+その他もろもろ、、、)

- 0 次近似としては質点系
- 惑星の運動には小惑星以下は関係ない

それでいいといえるためには、(原理的には) 他の全ての効果が無視できると「わかっている」必要がある。

- 太陽からの輻射圧
- 潮汐力
- 磁場

- 一般相対論的効果
- その他、、、

例:銀河の進化

典型的な銀河: 1000億個くらいの星、それと同程度の質量のガス、その数倍の質量の「ダークマター」からなる (ということになっている)

- 1000億体問題は今の計算機では全く無理
- 1000億体問題が解けても、それだけでは駄目
  - ガスから星ができる過程
  - 超新星爆発等で星がガスに戻る過程
  - ダークマターはどうするか

では、計算してわかることなんてあるのか?

まあ、それが今回の講義の究極的なテーマであるということで、、、

とりあえず、素過程が「わかっている」ものについては原理的には計算できる。まずはそういう前提で話を進めてみる。

本当に計算できるか？

銀河の例にあったように普通は「できない」

銀河の星の数: 10^{11}

多体計算で扱える粒子数:多くて 10^7

分子動力学計算だともっと大変

現実の系: 10^{23} 個

計算できる: 例えば 10^5 程度 (目的による)

- なるべく多くの粒子を扱うにはどうするか
- 少ない粒子で必要な答を得るにはどうするか (そんなことができるか)

が問題。実際には、どちらも、「そこで起きていることはなにか」という「物理」の理解が必要

とかいう抽象的な話を続けてもよくわからないので、以下、では重力多体系とはどんなものかという話にはいる。

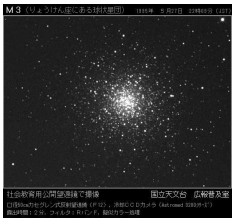
重力多体系

- そもそもどんなもの？(観測)
- 基礎方程式
- 無衝突系としての扱い
- 熱力学的な進化

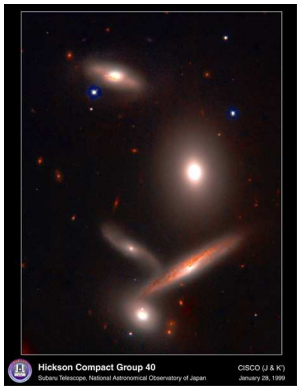
そもそもどんなもの？(観測)

銀河

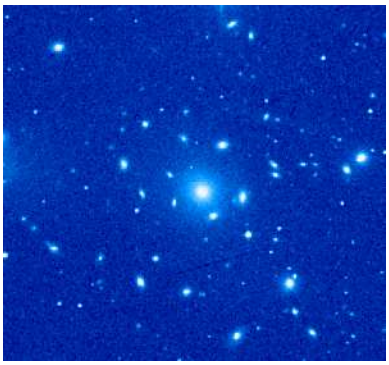
球状星団



銀河群

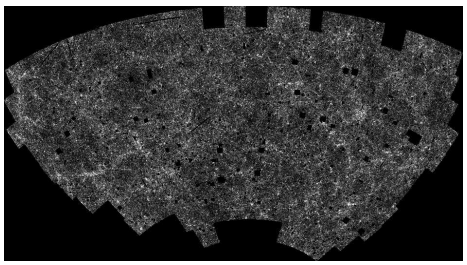


銀河団



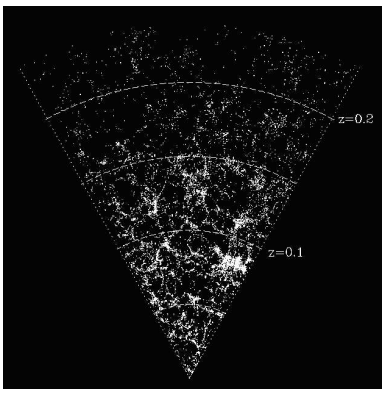
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap950917.html

大規模構造 (天球面)



http://www-astro.physics.ox.ac.uk/~wjs/apm_grey.gif

大規模構造 (距離情報あり) — SDSS スライス



重力多体系の基礎方程式

もとの方程式自体はもちろん、各粒子の運動方程式

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\sum_{j\neq i} Gm_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3}, \tag{3}$$

数値計算にはもちろんこれを使うわけだが、理論的な扱いには不便

というわけで、しばらくは (1 粒子) 分布関数 $f(x, v, t)$ で話をする。

この時の基礎方程式:(無衝突) ボルツマン方程式

(無衝突) ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{4}$$

f:6 次元位相空間での分布関数 Φ :重力ポテンシャル, 以下のポアソン方程式の解

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho. \tag{5}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m\int dv f, \tag{6}$$

なお、以下の議論では (当分) m のことは忘れて、その代わり f が個数密度ではなくて質量分布であるということにしておく。

ボルツマン方程式の導出

BBGKY とか使った導出はなんか見れば書いてあるし、良く知らないのでパス。

直観的な意味:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

要するに 6 次元位相空間でのラグランジュ微分 Df/Dt

で、これが $= 0$: 非圧縮での連続の式

力学平衡

「力学平衡」= 上の無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解

ある分布関数 f が力学平衡にある= それによって決まるポテンシャル Φ を固定して考えた時に、f の時間微分が 0 になるということである。

普通の流体なら静水圧平衡にあたる。

当然であるが熱平衡とは限らない

無衝突ボルツマン方程式と熱平衡

力学平衡ではないところからの無衝突ボルツマン方程式に従った時間発展を考える。

これは流れにそって f を保存するので、系のエントロピー ($f \log f$ の積分) は一定、つまり、少なくとも形式的にはエントロピーは保存される。

もちろん、「形式的には」と断わるのは、もうちょっとややこしい問題があるから。これはあとで。

運動の積分

ポテンシャル Φ のもとで、ある x, v の関数 I が運動の積分であるとは、その上で

$$\frac{d}{dt} I(x, v) = 0, \tag{7}$$

がなり立つこと。

つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変化しないということ

ちょっと変形すれば

$$v \cdot \nabla I - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial I}{\partial v} = 0 \tag{8}$$

無衝突ボルツマン方程式の定常解と同じ式

細かい話

「運動の積分」というときの流儀は 2 通りあって、一般に運動の保存量のことを「運動の積分」という流儀もあるが、ここでは位相空間の座標だけの関数であって同時に保存量であるものをさす。具体的には、たとえば 1 次元調和振動子で「初期の位相」というのは保存量だが運動の積分ではない。これは、時間が入ってくるからである。

例:

エネルギー $1/v^2 + \Phi$ や、ポテンシャルが球対称 (r だけの関数) の場合の角運動量ベクトル $\mathrm{L} = r \times v$ は運動の積分である。

ジーンズの定理

I について以下の「ジーンズの定理」がなり立つ。

ジーンズの定理 任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

いいかえると、分布関数 f が定常であるためには、運動の積分 $I_1, I_2, ..., I_m$ があって $f = f(I_1, I_2, ..., I_m)$ の形で書けることが必要十分ということ。

証明

まず「定常ならば運動の積で書ける」というほうを考えてみる。これは、f 自体が運動の積分の定義を満たしているので、OK。

逆のほうは、実際に f の全微分を I_k で書き下せば、それぞれが 0 になるということからいえる。

というわけで、これはなかなか強力な定理だが、一般の場合にはそれほど役に立つわけではない。というのは、ポテンシャルを与えた時に一般に運動の積分というのは 5 個あるはずだが、それらをすべて知っているということはないからである。

ただし、球対称とか軸対称とか条件をつけると、いろいろちゃんと決まるようになる。以下、まず球対称の場合を考える。

球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の 3 成分で 4 つ。

一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

意味がある特別な場合: ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合。

この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量 (近点経度) が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

普通の場合は

一般には軌道が閉じない。

近点経度に対応するような保存量は実は存在している

ある軌道はエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう

(数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが)。

その保存量に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じる。あんまり物理的ではない。

$f(E,J)$

f は E と J によるということにしたわけだが、いま球対称な場合ということなので J の方向にではなく、絶対値だけに依存するのでないといけない。したがって、実は球対称の分布関数は一般に $f(E,J)$ と書けるということになる。

我々が扱いたいのは自己重力系なので、実際にポアソン方程式を球対称の場合に書き下してみると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\int f\left(\frac{1}{2}v^2+\Phi, |r\times v|\right)dv, \quad (9)$$

てな感じになる。

$f(E)$ の場合

$f(E,J)$ の場合でもまだちょっと大変なので、さらに単純化してとりあえず J にもよらない場合というのを考えてみる。

この場合空間上の各点で速度分散が等方的

一般にある方向の速度分散というのは

$$< v_e^2 >= \frac{1}{\rho}\int v_e^2 f(v^2+\Phi)dv \quad (10)$$

となるが、 f が v の絶対値にしかよらないので、 v_e の方向にこの積分はよらない。まあ、速度分散がとかいうより、速度分布自体が等方的なのだから当然ではある。

$f(E)$ の場合 (続き)

以下、扱いやすくするために変数をとり直す。

$$\Psi = -\Phi+\Phi_0, \qquad \mathcal{E} = -E+\Phi_0 = \Psi - v^2/2 \quad (11)$$

ここで Φ_0 は定数で、普通は $\mathcal{E}>0$ で $f>0$, $\mathcal{E}\le$ で $f=0$ となるようにとる。

これらを使って、さらに v の角度方向に渡って積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) &= -16\pi^2 G\int_0^{\sqrt{2\Psi}} f(\Psi-\frac{1}{2}v^2)v^2dv \\ &= -16\pi^2 G\int_0^{\Psi} f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}d\mathcal{E}. \quad (12)\end{aligned}$$

これで、一般に f を与えて Ψ を求めるとか、あるいはその逆とかが出来る。

球対称な分布関数の例

ここであげるのはあくまでも例であるが、さまざまな理由からその性質がよく調べられているものである。

- ポリトロープ
- Hernquist モデル
- 等温解
- キングモデル

ポリトロープとプラマーモデル

ある意味でもっとも簡単な分布関数の例は、$\mathcal{E}$の冪乗(パワー)で書けるものである。例えば

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E}>0) \\ 0 & \text{otherwize}\end{cases} \quad (13)$$

これから、まず密度を Ψ の関数として求められる ($v^2 = 2\Psi\cos\theta$ なる変数変換のあと)。で、答えは

$$\rho = c_n\Psi^n \quad (\Psi>0) \quad (14)$$

となる。ただし、 c_nが有限になるためには $n>1/2$でないといけない。

上を使ってポアソン方程式から ρを消去すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) + 4\pi G c_n\Psi^n = 0 \quad (15)$$

変数を適当にスケーリングして

$$\frac{1}{s^2}\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{d\psi}{ds}\right)+\psi^n=0 \tag{16}$$

としたものを Lane-Emden 方程式と呼ぶ。

実際には、上の Lane-Emden 方程式を解かないとポテンシャルや密度がどうなっているかはよくわからない。

プラマーモデル

一般の n ではこの方程式には初等的な解はないが、 $n=5$ の場合には解があることが古くから知られている。これは

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}s^2}} \tag{17}$$

の形をしている。密度は $c_5\phi^5$ で与えられることになる。

密度が $r=0$ で有限で、$r\to\infty$ で $1/r^3$ より速く落ちるので、質量は有限である。

これは、天文学的になにか素晴らしいものであるというわけではないが、球状星団のうち中心密度が低いものにはまあまあ似ていなくもない。とりあえず、これの意味は、解析関数で簡単に書ける自己重力系の self-consistent なモデルであるということである。

Hernquist Model

プラマーモデルはその存在が前世紀から知られているが、こちらは論文が発表されたのが 1990 年という新しいモデルである (Hernquist, L., 1990, ApJ 356, 359)。

ポテンシャルを

$$\Phi=-\frac{1}{r+a} \tag{18}$$

で与える。密度分布は

$$\rho=C\frac{a^4}{r(r+a)^3} \tag{19}$$

で書ける。分布関数は求まっているが、めんどくさいのでここには書かない。

Hernquist Model と$r^{1/4}$則

Hernquist Model には、「$r^{1/4}$則をかなり良く再現する」という (天文学的には) 著しい特徴がある。

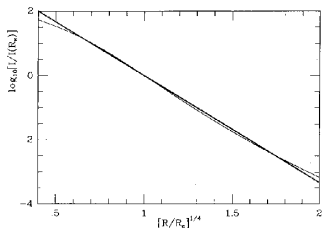


FIG. 4.—Surface brightness profiles for the $R^{1/4}$ law (*thick curve*) and the present model (*thin curve*) as a function of $(R/R_e)^{1/4}$. Surface brightness is normalized to its value at R_e where R_e refers separately to the effective radii of the two models.

$r^{1/4}$ 則については後でその物理的解釈も含めて詳しく議論することにしたいが、要するに、観測される楕円銀河の表面輝度の対数 (要するに等級ですね) が、半径の $1/4$ 乗に対して直線にのって見えるというものである。

等温モデル

後で出てくるようないくつかの理由から、熱平衡状態について良く理解しておくことは結構大事である。

熱平衡状態では (古典統計なので) 分布関数はマックスウェル–ボルツマン分布、すなわち

$$f(\mathcal{E})=\frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}e^{\mathcal{E}/\sigma^2}=\frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{\Psi-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{20}$$

で与えられなければならない。

等温モデル (続き)

まず、例によって分布関数を速度空間で積分して密度をポテンシャルの関数として表す。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=1 \tag{21}$$

を使うと、

$$\rho=\rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \tag{22}$$

ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right)=-4\pi G\rho \tag{23}$$

従って、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right)=-4\pi G\sigma^2\rho \tag{24}$$

等温モデル(続き2)

まず、一つ特別な解があるということを指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \tag{25}$$

は、解の一つとなっている。(singular isothermal sphere)

これは self consistent ではない: 質量が $M_r \propto r$ となって発散

渦巻銀河の、「回転速度が中心からの距離に(あまり)依存しない」(いわゆる flat rotation curve)という性質: $\rho \sim 1/r^2$ のダークハローを示唆(?)

特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、 $r \to \infty$ の極限では singular isothermal に近付く。

流体との関係

等温モデルは、エントロピー極大であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{26}$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_B T}{m}\rho \tag{27}$$

を使って P を消して、さらに M_r を微分してみれば、係数を別にして

$$C\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2 \tag{28}$$

ポリトロープの場合は?

等温モデルでは stellar system とガスで同じ方程式になっている。

ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と stellar system のそれとは一致する。

が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する(ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大)が、一般のポリトロープではそんなことはない(そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的にはボルツマン分布であるから)。

King Model

等温モデルは、すでに述べたように熱平衡(エントロピーの変分が 0)という重要な意味を持つ定常解

質量が無限大であり現実に存在しない

なにか適当な仮定を置くことで、「おおむね等温モデルであり、なおかつ有限の大きさをもつ」というものを考えることはできないだろうか?

発散する理由

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{29}$$

上の分布関数で、質量が発散する理由: な理由は、分布関数がエネルギー無限大 ($\mathcal{E} \to -\infty$) まで 0 にならないこと

有限の質量のものが自己重力でまとまっているためには、すべての粒子のエネルギーが負でないといけないので、これでは自己重力系が表現出来ないのはある意味では当然

それならば、ある有限のエネルギー以上のものはないことにしてしまえばいい。

有限で切る方法

とりあえず Lowered Maxwellian と呼ばれる以下のようなものを考える

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}(e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \le 0) \end{cases} \tag{30}$$

これは $\mathcal{E} = 0$ で $f = 0$ となるように、 1 を引いたというだけである。これしか方法がないというわけではないが、これは扱いやすいこともあってもっともよく使われている。

ちょっと計算

例によって、まず速度空間で積分すれば

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\int_0^{\sqrt{2\Psi}}\left[\exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) - 1\right]v^2 dv \\ &= \rho_1\left[e^{\Psi/\sigma^2}\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\Psi}{\sigma}}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}}\left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right)\right] \qquad (31)\end{aligned}$$

ここで erf は誤差関数で、積分が有限区間であるために出てくる。最後の項は1引いている分の寄与である。ちなみに

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt. \qquad (32)$$

これでポテンシャルの関数として密度が求まったので、あとはポアソン方程式に入れて数値的に解くだけである。

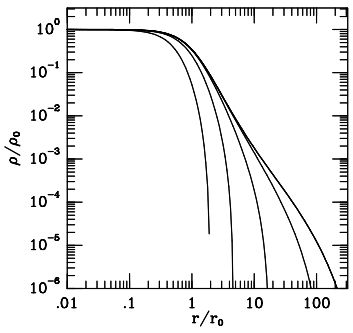
境界条件は？

半径方向の分布は、中心から無限遠まで与えられる。

実は外側の境界をどうとるべきかはちょっと自明ではないので、とりあえず中心から初期値問題として解くことを考える。

初期条件としては、まず $d\Psi/dr = 0$ とする、すなわち、中心密度が有限の解を考える。 Ψ_0 は任意に選べるので、これの値によっていろいろな解がでてくる。

数値解



これは実際に数値的に解いてみたものの例である。速く落ちるものから、Ψ_0 が 1, 3, 6, 9, 12 と変えてみてある。

なお、横軸のスケールの r_0 は、

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}} \qquad (33)$$

として無次元化するのに使っている。

数値解(続き)

有限の半径 r_t で ρは 0 になる。

(解いていったときに Ψ が 0 になってしまうため)

この半径: King model の tidal radius 潮汐半径

King Model は、球状星団のプロファイルのモデルとして非常によく使われている。なお、$c = \log(r_t/r_0)$ のことを concentration parameter といって、観測データにキングモデルを合わせた論文では普通これがパラメータになる。理論計算では Ψ_0 が使われるので、ちょっとややこしいことが多い。

Jeans Equations

無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}} = 0, \qquad (34)$$

のモーメントをとっていろいろ考えてみる。

速度空間全体で積分

第3項は発散定理で表面積分に置き換えられ、結局 0 になる。

速度空間で積分(続き)

最初の2項は

$$\nu = \int f d^3\mathrm{v}; \bar{v}_i = \frac{1}{\nu}\int f v_i d^3\mathrm{v} \qquad (35)$$

と置いてやれば (密度と、局所的な平均速度)

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (36)$$

これは、流体の場合の連続の式と同じものである。

もうちょっといろいろする

さらに、速度の 1 次のモーメントをとるために Collisionless Boltzman に v_j を掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f v_j d^3\mathrm{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathrm{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathrm{v} = 0, \quad (37)$$

というような式が出てくる。但し、 i についての和をとっていることに注意。

さて、$v_j f$ について発散定理 (1 次元) を使えば

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathrm{v} = -\int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathrm{v} = -\delta_{ij}\nu \quad (38)$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (39)$$

但し、$\overline{v_i v_j}$ は $v_i v_j$ の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から $\partial\nu/\partial t$ を消すと

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j\frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (40)$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \quad (41)$$

を使って書き直すと

Jeans 方程式

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial t} + \nu\bar{v}_i\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu\frac{\partial\Phi}{x_j} - \frac{\partial(\nu\sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (42)$$

これは、流体の場合のオイラー方程式 (運動方程式) と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿ってみた平均速度の Lagrange 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な stress tensor σ_{ij}^2 になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば stress tensor は $\sigma^2 I$ (I は単位行列) の形に書ける。

例：球対称恒星系の M/L

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での Jeans equation は以下の形に書き直せる：

$$\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r}\left[2\overline{v_r^2} - \left(\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}\right)\right] = -\nu\frac{d\Phi}{dr} \quad (43)$$

(証明は、、、まあ、面倒なだけなので省略) もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu}\frac{d(\nu\overline{v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (44)$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \quad (45)$$

M/L の推定

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \quad (46)$$

で、質量が「観測量」からわかる。つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ν は質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの luminosity の分布でも構わない

さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから「実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。

M/L の推定

というわけで、実際の観測データから M/L の空間分布が決められることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、M/L を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

ビリアル定理

さらに空間全体のモーメントをとる。

式 39 において、密度 ν を質量密度 ρ で置き換え、さらに x_k を掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathrm{x} = -\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathrm{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\Phi}{x_j} d^3\mathrm{x} \tag{47}$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathrm{x} = -\int \delta_{ki}\rho\overline{v_i v_j} d^3\mathrm{x} = -2K_{kj} \tag{48}$$

これは、運動エネルギテンソル K の定義を与える。ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル W と呼ばれるものである。

ビリアル定理 (続き)

さらに、 σ^2 の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \tag{49}$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2}\int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d^3\mathrm{x}, \quad \Pi_{jk} = \int \rho\sigma^2_{jk} d^3\mathrm{x}, \tag{50}$$

さらに、 j,k についての式と k,j についての式を足してやると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathrm{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{51}$$

ビリアル定理 (続き 2)

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3\mathrm{x} \tag{52}$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathrm{x} \tag{53}$$

で、結局

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{54}$$

これをテンサービリアル定理という。

スカラービリアル定理

今定常状態 （ I の時間微分が 0) を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、T, Π の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー K の 2 倍になる。W の方は、Φ の定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k x_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} d^3\mathrm{x} = \int\int \rho(\mathrm{x})\rho(\mathrm{x}') \sum_k \frac{x_k(x_k - x'_k)}{|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^3} d^3\mathrm{x} d^3\mathrm{x}' \tag{55}$$

ここで x と x' を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2}\int\int \rho(\mathrm{x})\rho(\mathrm{x}') \sum_k \frac{(x_k - x'_k)^2}{|\mathrm{x} - \mathrm{x}'|^3} d^3\mathrm{x} d^3\mathrm{x}' = \frac{1}{2}\int \rho\Phi d^3\mathrm{x} \tag{56}$$

というわけで、 W は系の全ポテンシャルエネルギーである。

スカラービリアル定理 (続き)

結局、

$$2K + W = 0 \tag{57}$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを E とすれば、 $E = K + W$ であるから、

$$E = -K = W/2 \tag{58}$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

系の「比熱」

自己重力系は熱平衡ではありえない。しかし、 King model のように近似的に熱平衡なものもあるので、ここでエネルギーの出入りに対する系全体の応答、つまり比熱というものを考えてみる。

ビリアル定理から $K = -E$、つまり、「エネルギーを奪うと運動エネルギーが増え、逆ならその逆になる」。つまり、見かけ上比熱が負になっている。これは重力が効く系では普通のことで、例えば地球を回る人工衛星といったものでも同様のことが起こっているわけである。

この、「見かけ上比熱が負」ということが、熱力学的不安定を通して構造形成 (自己組織化) が起きる基本的な理由である。

ジーンズ不安定

ここまで、自己重力多体系の平衡形状を (ごく簡単な場合だけ) 扱ってきたが、そろそろ飽きてきたような気もするので、これからは平衡形状ではなく時間発展について考えることにしたい。

時間発展といっても、もとの方程式が強い非線形性を (加速度の項に) 持つので、一般的な場合を解析的に扱うなんてことはほとんど出来ない。そこで、まず、平衡状態から無限小だけずれている場合に対して線形化した発展を考えるということにする。さらに、話を簡単にするために、「 無限一様 」な平衡状態とし、まず CBE ではなく流体の話を考える。

流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}) = 0 \tag{59}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + (\mathrm{v} \cdot \nabla)\mathrm{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi \tag{60}$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{61}$$

で記述される。あ、あと状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。(断熱でも等温でもなんでもいいが)

線型化

今、 $\rho, p, \mathrm{v}, \Phi$ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好にして、添字 0 がつくものはもとの方程式の平衡解であり、 1 がつくものは小さい (二次以上の項を無視していい) として方程式を書き直すと、 v_s を音速として

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathrm{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathrm{v}_0) = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} + (\mathrm{v}_0 \cdot \nabla)\mathrm{v}_1 + (\mathrm{v}_1 \cdot \nabla)\mathrm{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{63}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \tag{64}$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \tag{65}$$

無限一様の時

既に述べたように、無限一様でいたるところ密度、圧力が等しいというのが平衡で、速度も0だったとすると、上の2本は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathrm{v}_1) = 0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{67}$$

となる。下2本は見かけはかわらない。これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{68}$$

めでたく方程式が線形化されたので、分散関係を求めれば算数はおしまい。どういう方程式か 見ておこう。

定性的な理解

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{69}$$

最初の2項をみれば普通の波動方程式で、最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。したがって、波長が短い極限では普通の波動方程式に近付く。これに対し、波長が長い極限では空間 2 階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

分散関係

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(\mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \omega t)} \tag{70}$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \tag{71}$$

ということになる。

分散関係 (続き)

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2} \tag{72}$$

と書くと、

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的 (普通の音波と同じ)
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない (中立安定)
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある (不安定)。

分散関係 (続き 2)

定性的に見たときにわかったように、波長が短ければ普通の音波として振舞うが、波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化することになる。つまり、密度が上がり始めたらどんどんあがる (下がり始めたらどんどんさがる) ということになる。

恒星系でのジーンズ不安定

何度も出てきたがもう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}} = 0, \tag{73}$$

ここで f は 6 次元位相空間での分布関数である。Φ は重力ポテンシャルであり、以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho. \tag{74}$$

G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m\int d\mathrm{v} f, \tag{75}$$

である。これを流体の時と同様に線形化して、その振舞いを調べる。

線型化

分布関数を $f_0 + f_1$、ポテンシャルを $\Phi_0 + \Phi_1$ とし、添字 0 がつくほうは定常解であるとして式を整理すれば

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla f_1 - \nabla\Phi_0\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{v}} - \nabla\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}} = 0, \tag{76}$$

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi G\int f_1 d\mathrm{v}. \tag{77}$$

ということになる。これが線形化された無衝突ボルツマン方程式である。

Jeans 不安定

ここではもっとも簡単に解析できる場合として空間分布が一様な場合を考える。これから f_0 は速度だけの関数であり、 Φ_0 は定数としていいことになるので

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla f_1 - \nabla\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}} = 0, \tag{78}$$

と少し式が簡単になる。まず、流体の場合と同じような平面波型の解を考えてみよう。

$$f_1 = f_a(\mathrm{v})\exp[i(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x} - \omega t)] \tag{79}$$

$$\Phi_1 = \Phi_a\exp[i(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x} - \omega t)] \tag{80}$$

を

平面波型の解

速度空間の方にも伝わっていく波とかいうのも考えられないわけではないが、とりあえずそういうのは考えない。これらを線形化した式に入れれば

$$(-\omega + \mathrm{v}\cdot\mathrm{k})f_a(\mathrm{v}) - \Phi_a\mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}} = 0 \tag{81}$$

$$-k^2\Phi_a = 4\pi G\int f_a d\mathrm{v} \tag{82}$$

となる。これらから f_a を消せば、 Φ_a も落ちて

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2}\int \frac{\mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}}}{\mathrm{k}\cdot\mathrm{v} - \omega} d\mathrm{v} = 0 \tag{83}$$

となって、f_0 が与えられていれば k と ω の関係、すなわち分散関係を与える。

臨界点

分散関係

$$1+\frac{4\pi G}{k^2}\int\frac{\mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}}}{\mathrm{k}\cdot\mathrm{v}-\omega}d\mathrm{v}=0 \tag{84}$$

はちょっと困った式で、 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{v}-\omega=0$ が特異点になっている。したがって、実数の振動数を考えるのはすこし厄介な話になる。まず、臨界点、すなわち振動数が 0 の場合と、不安定、すなわち振動数が純虚数の場合を考えよう。

臨界点(続き)

式が繁雑なので、いま、波数ベクトルを x 軸方向にとることにすると、分散関係は

$$1+\frac{4\pi G}{k^2}\int\frac{k\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{kv_x-\omega}d\mathrm{v}=0 \tag{85}$$

臨界安定で $\omega=0$ とすれば、結局

$$k_J^2=-4\pi G\int\frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x}d\mathrm{v} \tag{86}$$

となる。 f_0 が $v_x=0$ で有限で微分可能なら積分は求まるので、これから $\omega=0$ となる波数 k_J は決まる。

流体との対応

速度分布 f_0 をマックスウェル分布

$$f_0(\mathrm{v})=\frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{87}$$

にしてみる。これは例によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv=\sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{88}$$

を使って全部積分できて、

$$k_J^2=\frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2} \tag{89}$$

となる。これは、流体の場合と同じになっている。つまり、中立安定な波長(ジーンズ波長)は、恒星系と流体で同じである。

不安定な場合

次に、振動数が純虚数の場合を考えてみる。この時は、$\omega=i\gamma$ として元の式にマックスウェル分布を入れて整理すると

$$1+\frac{2\sqrt{2}\pi G\rho_0}{k\sigma^3}\int\frac{v_xe^{-v_x^2/2\sigma^2}}{kv_x-i\gamma}dv_x=0 \tag{90}$$

ここで、被積分関数の分母を実数にするために

$$\frac{v_x(kv_x+i\gamma)e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{k^2v_x^2+\gamma^2}dv_x=0 \tag{91}$$

と書き直すと、虚部は奇関数なので落ちる。

不安定な場合(続き)

実部は

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2e^{-x^2}}{x^2+\beta^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\pi\beta e^{\beta^2}[1-\mathrm{erf}(\beta)] \tag{92}$$

なる関係を使って

$$k^2=k_J^2\left\{1-\frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\exp\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\sigma^2}\right)\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\right)\right]\right\} \tag{93}$$

なんだかよくわからないが、まあ、 k と ω (γ) の関係を与えてはいる。 $k<k_J$ なら、ある実数 γ (正負どちらでも) があって上を満たす。ただし、 $k=k_J$ の場合と $k=0$ の極限を除いては、値は流体の場合とは一致しない。

不安定な場合(続き2)

というわけで、波長がジーンズ波長よりも長いモードは流体と同様不安定で、勝手に成長することになる。

van Kampen mode

さて、それでは、音波に当たるような振動数が純実数のモードというものはあるのだろうか？これについては、標準的な教科書でも若干混乱した記述がなされていることがある。以下、van Kampen の論文 (1955, Physica, 21, 949) に沿った理解を試みることにする。

van Kampen mode(続き)

分散関係の一つ前の式に戻ってみると、

$$(-\omega + \mathrm{v}\cdot\mathrm{k})f_a(\mathrm{v}) + \frac{4\pi G}{k^2}\mathrm{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathrm{v}}\int f_a d\mathrm{v} = 0 \qquad (94)$$

となっている。面倒なのでまた y, z 方向についてはあらかじめ積分すると、

$$(-\omega + kv_x)g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x}{k} f_0(v_x)\int g dv_x = 0 \quad (95)$$

ただし、g は f_a を y, z 方向に積分したものである。また、 f_0 は等方的であるとした。

van Kampen mode(続き 2)

上の式は g についての線形斉次な方程式で、

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G}{k}\frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} \qquad (96)$$

という解を持つ。ここでは、 $\int g dv_x = 1$ となるように規格化した。ただし、意味のある解であるためには

$$-\frac{8\pi^2 G}{k}\int \frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} dv_x = 1 \qquad (97)$$

を満たすようになっている必要がある。これは、最初に出した分散関係と実は同じ式である。

van Kampen mode(続き 3)

最初にもいったように、分散関係の式がよろしくないのは $v = \omega/k$ で積分が特異になるからである。意味のある解を求める一つの考え方は、 gを超関数に拡張してしまうことである：

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\omega - kv_x} + \lambda\delta(\omega - kv_x)\right] \qquad (98)$$

ここで $\mathcal{P}$は主値をとるということで、要するに積分の不定性を δ 関数のほうに押しつけてみたというだけである。実際に、規格化を満たすという条件から λの値を決めることができる。この「モード」は、任意の ω と $k > k_J$ なる k のすべての組合せに対して存在する。これを van Kampen mode という。

van Kampen mode(続き 4)

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\omega - kv_x} + \lambda\delta(\omega - kv_x)\right] \qquad (99)$$

δ 関数の分は、$v_x = \omega/k$ のところにだけ値があるということを示している。つまり、位相速度が摂動を受けていないもともとの速度と等しい、いいかえれば与えたものがそのままラグランジュ的に動いていくようなものである。これは、いま重力がまったくない極限を考えれば、単に摂動がまわりと相互作用することなくそのまま動いていくというものであると考えられる。これにたいして、もう一つの項は重力による応答を示していると考えていい。

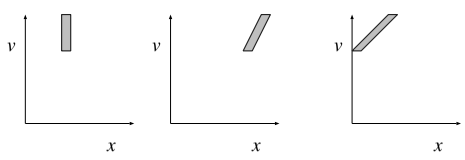
Phase Mixing

任意の摂動が、減衰しないモードの組合せとして表現できるのなら、それはなにか音波のような伝わっていく波になっているのであろうか？

実はそんなことはない。これは、以下の簡単な例で示すことができる。

1 次元で、重力がない系である有界な領域に摂動 (overdensity) を与えたとする。で、簡単のために周期境界で、右から出ていったものが左から入ってくるとしよう。もちろん、ちゃんと適当なポテンシャルを考えるとか、無限一様な場合を考えるとかしても本質は同じである。(無限一様な場合は、単に周期的な摂動を与えたというのに対応する)

Phase Mixing (続き)



すると、時間がたつに従って摂動が引き延ばされていくということがわかる。このために、例えば密度の変化といった量は時間がたつにしたがって減衰していく。

つまり、 singular な van Kampen mode 自体は減衰しないが、それを重ね合わせた有限の広がりを持つ摂動は減衰する。これが通常 phase mixing と呼ばれるものである。

Landau Damping

複素数の ω があると信じて、そういう解を求めると、ちゃんとそういうものが見つかる。逆にいえば、解が指数関数の形に書けると仮定すれば、ジーンズ波長より短ければそれは指数関数的に減衰するわけである。

今、簡単のために重力がない一次元系を考える。初期の波数が k であるような摂動は

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[i(kx - vt)] \tag{100}$$

という形をしているということにしよう。これは、自明な解になっているということは式を良く見ればわかる。

注意:、これは最初に安定性解析の時に仮定した $f_a(v)\exp[i(kx-\omega t)]$ という形とは違う

Landau Damping (続き)

関数形の違い: 振動数 ω が v そのものであり、速度空間のなかでの位置に依存するため

このことをいいかえると、上のような「自然な」解があるにもかかわらず、モード解析をするとvan Kampen mode のような singular なものが出てくるのは、モード解析の仮定として位相速度が粒子の速度に寄らないようなものを考えたからであるともいえる。

Landau Damping (続き2)

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[i(kx - vt)] \tag{101}$$

上の「自然な」解はどのように振舞うかをちょっと見てみよう。密度は、

$$\rho_1(x,t) = e^{ikx}\int g(v)e^{ivt}dv \tag{102}$$

これから、例えば $g(v)$ が

$$g(v) = \begin{cases} 1/2v_0 & |v| < v_0 \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{103}$$

みたいなものだと、 $1/t$ で減衰するという解がでてくる。

(線型)Landau Damping の意味

減衰が起きるのは、初期条件が非常に特別なものであるため

速度ごとに波の位相速度が違うのに、初期条件としてその空間位相がすべてそろったものを考えた

時間がたてば位相はずれていくので速度方向に積分して見た波の振幅は小さくなってくことになる。

なお、 $g(v)$ に適当な形を仮定すれば、もっと速く減衰するものも作れる。

無衝突ボルツマン方程式にしたがった進化は可逆過程である (エントロピーを生成しない) ので、原理的には逆に振幅が大きくなるような初期条件も存在する。実際、減衰していく解で、どこかで時間反転すればそういう解が作れるわけである。

減衰の意味

ジーンズ波長より短い摂動の (線形での) 減衰は、無衝突系に固有の現象であり、流体ではこれに対応するものはない。ここでは、まず、その物理的意味についてもう一度考え直して置こう。

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[ik(x - vt)] \tag{104}$$

初期の摂動の位相が v によらないとすれば、その時間発展は上式で与えられる。したがって、密度はこれを v で積分したものであり、式をじっとみればわかるように $g(v)$ のフーリエ変換になっている。したがって、$g(v)$ を選べばいろんな時間依存を持つものが作れることになる。

減衰の意味 (続き)

無衝突系ではエントロピー生成はない。これは、分布関数 f が軌道にそって保存するからであった。しかし、上の式からわかるように、速度方向の構造は、時間がたつにしたがってどんどん細かくなっていってしまう。これに対して、実際の系では粒子数が有限であり、分布関数に無限に細かい構造をつくることが出来るわけではない。また、観測するとか、数値計算するとかいうことを考えると、どこかで分解能よりも構造が細かくなってしまうことになる。

粗視化

通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dx dv \tag{105}$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ $g(x, v; h)$ というものを考え、

$$\int g(x, v; h) dx dv = 1 \tag{106}$$

$$\lim_{h \to 0} \int f g(x_0 - x, v_0 - v; h) dx dv = f(x_0, v_0) \tag{107}$$

というようなもの、つまり、適当な極限で δ 関数になるようなものを考える。

粗視化された分布関数

粗視化された分布関数 $\hat{f}_h$ というものを

$$\hat{f}_h = \int f g(x - x_1, v - v_1; h) dx_1 dv_1 \tag{108}$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どういうことがいえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f} \ln \hat{f} dx dv \tag{109}$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

粗視化されたエントロピーの増大

「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらない。

言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとしよう。そうすると、$\hat{S}$ は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に熱平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

非線形 Landau Damping

ちょっとここで話を変えて、非線形 Landau Damping というものを考えてみる。これはつまり、摂動の作る重力が無視出来ないような時にその摂動がどう振舞うかということである。

この解析は実は結構難しい。というのは、もともと線形 Landau damping というか phase mixing というものはあるので、非線形性が効くかどうかに無関係に摂動はどんどん減衰していくからである。しかし、とりあえず、非線形な効果を考えるとどんなことが起きるかをちょっと整理してみる。

非線形 Landau Damping (続き)

とにかくポテンシャルの波というのがあって、速度 v_w で動いているとする。これに対して速度 v_p で動いている粒子があるとしよう。この粒子と波の相互作用というものを考えてみる。

$v_p \sim v_w$ 、つまり大体同じ速さで動いていることにすると、粒子はその波に対する相対的位置によって受ける力の方向が変わる。波に対して遅れていれば引っ張られるし、そうでなければ減速される。このため、初期にどういう位相にいたかによって、大きくエネルギーをもらったり失ったりするものがあることになる。

非線形 Landau Damping (続き 2)

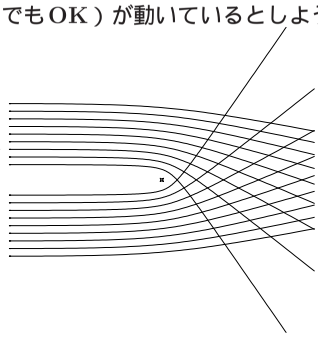
波が無限に長い間維持されていれば、無制限にエネルギーをやりとり出来るわけではない。

座標変換して波が止まっている座標でみれば当然のことで、あるポテンシャルの谷のなかに止まっているか、それとも超えて動いていくかのどちらかであって平均すればエネルギーのやりとりは起きないことになる。

もっとも、ここで波がまた指数関数的に減衰しているはずとか過程するといろんなことが起きるが、省略。

Dynamical Friction

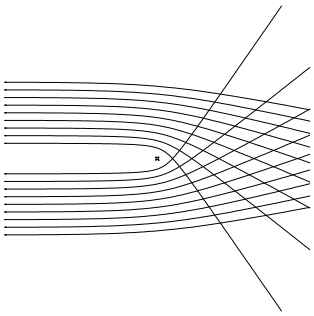
少し違った状況を考えてみる。今、温度 0 の、無限に一様な物質分布の中を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動 (質点によるものでも OK) が動いているとしよう。



バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のように、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。

Dynamical Friction (続き)

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっている。



Dynamical Friction (続き 2)

回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速される = dynamical friction

別に動いているものが単純な質点のポテンシャルとかでなくても、3 次元空間のなかで有界なものが動いていれば常に働く

つまり、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

Dynamical Friction (続き 3)

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。 Dynamical Friction の例では、質点の運動エネルギー (これはエントロピーを持たない) が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

Violent relaxation

ここまで述べてきたことは、

- 線形 Landau damping では、粗視化エントロピーを増やすことができる。
- 非線形 Landau damping では、線形の phase mixing 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。

線形 Landau damping では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはあきらか。

非線型の場合は？

しかし、非線形の場合はどうだろう？エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか？

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河というのは、結構たくさんあるわけだが、これはどれも似たような形をしている。これはたんに形が似ているというだけではなく、実は、半径方向の密度 (表面輝度) 分布に比較的に共通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる $r^{1/4}$ 則、あるいは Hernquist Profile で良く近似できているわけである。

Violent Relaxation

楕円銀河がどういうふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、Lynden-Bell (1967) は violent relaxation というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと次のようなものである

Violent Relaxation (続き)

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置 (位相空間内での) によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを Lynden-Bell統計と名付ける。

Violent Relaxation (続き)

というわけで、

- 力学平衡に向かう間は、単に phase mixing だけが起こっているわけではなくこの Lynden-Bell 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、Lynden-Bell統計であって普通のMaxwell-Boltzman統計には従わない理由は、 f の値に制約がある (初期の分布の最大値を超えられない) からであるそうである。

Lynden-Bell は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った (現在も持っている)。

帰結

violent relaxation によって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、(単位質量当たりの) エネルギー変化が位置だけで決まるからである。
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

衝突系

ここまでの話:粒子数無限大

実際の系、数値実験:粒子数小さい

(大抵は数値実験では実際より小さい)

この場合、「衝突項」 $\partial f/\partial t|_{\rm coll}$ の効果が無視できない。 以下、その話。

基本的に衝突項は「2 体散乱 」の効果 (多体の効果は無視できる)、つまりいわゆる 2 体緩和を考えればいい (らしい)。

２体緩和

２体緩和とはなにか？

原理的には結構厄介な問題

有限粒子数の自己重力多体系の進化

最初は力学平衡ない → まず力学平衡に

有限粒子数: 真の力学平衡というものはない。

有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するに従って、ポテンシャルが必ず変化する。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

効果の分離

粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能？

系が力学平衡にあるとみなすことができればそれは可能。

力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによる。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、まず、理想化された状況から考えていくことにする。

理想化：一様等方な分布

例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これも結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。

速度０で空間内に一様（ランダム）に分布した質点を考え、その中を質量０のテスト粒子を飛ばして見る。

この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけ

しかし、この例は２体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。

もっとも簡単な例

分布している質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ） b を速度 v で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{2b}{(b/b_0)^2-1} \\ b_0 &= \frac{Gm}{v^2} \end{aligned} \tag{110}$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが $(b, b+db)$ の範囲にある散乱の回数は $2\pi nvbdb$ である。

角度の変化

散乱の方向はランダム

従って平均としては（一次の項は）０になる。

しかし、 ２次の項は０にならない。これは

$$< \Delta\theta^2 >= 2\pi nv \int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 b db \tag{111}$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要があるであろう。すなわち、この積分は $b \to \infty$ で発散しているのである。

発散の解消

初めて２体緩和の性質を理論的に調べた Chandrasekhar は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

多体の干渉なんて本当にあるか？

もっと素直な解釈:実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部いれる（系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する）

積分の上限

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。

歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは 94-5 年頃である。

まあ、現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。

緩和時間

前の式から、適当に近似すると

$$< \Delta\theta^2 > \sim Gnv^{-3}m^2 \log(R/r_0) \tag{112}$$

R は先に述べたシステムの大きさ、 r_0 は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、$b_0 = GM/v^2$ の程度。

角度変化が 1 の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \tag{113}$$

となる。ここで Λ は上の R/r_0 を単に書き換えただけである。

今、$\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の 3 乗、数密度の逆数、質量の 2 乗の逆数に比例するということがわかったことになる。

多体系の緩和時間

前の式から、特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量 M、特徴的な半径 (ビリアル半径か何か) R、粒子数 N とすれば、ビリアル定理から $v^2/2 = GM/R$、力学的なタイムスケールが $t_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ となる。これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \tag{114}$$

となる。粒子数が大きいほど無衝突系に近付くのだから、まあ、当然の結果といえなくもない。

バックグラウンドが速度分布をもつ時

この計算を始めるといくらでも時間をつぶせていいんだけど、ちょっと細かい話になりすぎるので概念と結果だけ。

流体との違い

ガス:粒子の平均自由行程はシステムサイズよりもはるかに小さい

従って、平均自由行程がシステムサイズより小さく、システムサイズよりは小さく平均自由行程よりは大きいような空間スケールを考えると、そのなかでほぼ熱平衡になっていると思っていいことになる。つまりいわゆる Local thermal equilibrium (LTE) の仮定が使える。

こうなると、温度とか圧力とかいった量が近似的 (といっても実際上非常に高い近似精度で) に定義でき、そういったマクロな量で系の進化を扱う、特に熱の流れを拡散方程式で書くといったことが可能になる。

自己重力系の状況

自己重力質点系では状況が全くことなる。

粒子数が無限大の極限:平均自由行程も無限大

LTE がなりたたないどころか、そもそも熱平衡に向かう (すなわちエントロピーを生成する) ようなメカニズムがない。

粒子数が有限の場合も、依然として平均自由行程は長い

粒子数無限大の時の軌道からずれる典型的なタイムスケールは $Nt_d/\log N$ 程度。

流体の場合とは全く逆に、ほとんど自由運動 (というか、他の粒子全体が作るポテンシャルに沿った運動) をしていて、その場が有限の粒子で表現されるための揺らぎがあるので段々軌道が変わっていくということ。

緩和の意味の違い

自己重力系:

ローカルな熱平衡を仮定して拡散係数 / 輸送係数を求めるというのとは逆

ある一つの粒子が系の中を動き回りながらどういうふうにエネルギー等を変化させていくかという観点

すこし別ないい方をすれば:

通常の空間のなかでの密度や温度の変化を考える代わりに、6次元位相空間のなかでの分布関数の進化を考えるということに当たる。

バックグラウンドが速度分布を持つ場合

$$h(\mathrm{v}) = \int \frac{f(\mathrm{v}_f)}{|\mathrm{v}-\mathrm{v}_f|} d\mathrm{v}_f \tag{115}$$

なる関数 $h(\mathrm{v})$ を導入して、一次の項は

$$< \Delta v_i >= -\Gamma(1+m/m_f)\frac{\partial h}{\partial v_i} \tag{116}$$

2 次の項は

$$g(v) = \int f(\mathrm{v}_f)|\mathrm{v}-\mathrm{v}_f| d\mathrm{v}_f \tag{117}$$

とおけば、

$$< \Delta v_i \Delta v_j >= \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_i \partial v_j} \tag{118}$$

ここで Γ は

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{119}$$

である。

バックグラウンド速度分布が熱平衡の場合

速度分布を熱平衡、すなわち

$$f_0(\mathrm{v}) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{120}$$

とすると、

$$< \Delta v_{\text{平行}} > \ = \ -4\frac{n_f\Gamma}{\sigma^2}\left(1+\frac{m}{m_f}\right)G(x) \tag{121}$$

$$< \Delta v^2_{\text{平行}} > \ = \ 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}G(x)/x \tag{122}$$

$$< \Delta v^2_{\text{垂直}} > \ = \ 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}\frac{\mathrm{erf}(x)-G(x)}{x} \tag{123}$$

$$< \Delta E > \ = \ \sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}\left[-\frac{m}{m_f}\mathrm{erf}(x)+\left(1+\frac{m}{m_f}\right)x\mathrm{erf}'(x)\right] \tag{124}$$

ここで erf は誤差関数であり、

$$G(x) = \frac{\mathrm{erf}(x)-x\mathrm{erf}'(x)}{2x^2} \tag{125}$$

また $x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$ である。

式の意味

まず、速度の 1 次の項を見てみる。

$$< \Delta v_{\text{平行}} >= -4\frac{n_f\Gamma}{\sigma^2}\left(1+\frac{m}{m_f}\right)G(x) \tag{126}$$

$$G(x) = \frac{\mathrm{erf}(x)-x\mathrm{erf}'(x)}{2x^2} \tag{127}$$

$x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$

タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールが v^3 であるのに対し、逆の極限では 一定になる

速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは $v \sim \sigma$ で決まる値あたりになる。

Dynamical Friction

1次の項は、前に述べたように dynamical friction を表している。

恒星系が質量の違う 2 つの成分から出来ているような場合:

力学平衡で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠くはなれている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。

2次の項

次に、2次の項を見てみる。

$$< \Delta v_{\text{平行}}^2 > \ = \ 2\sqrt{2}\frac{n_f \Gamma}{\sigma} G(x)/x \tag{128}$$

$$< \Delta v_{\text{垂直}}^2 > \ = \ 2\sqrt{2}\frac{n_f \Gamma}{\sigma} \frac{\mathrm{erf}(x) - G(x)}{x} \tag{129}$$

$$\tag{130}$$

速度に平行な成分も垂直な成分も、 v が大きい極限では0にいく。これに対し、速度が0の極限では、どちらも一定値に収束する。これは停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表している。

熱平衡とその安定性

ここまでで、一応素過程の話をしたことにしたので、改めて熱力学に戻る。

熱平衡状態の非存在

重力多体系に統計力学 / 熱力学を適用する際の基本的な問題：

「重力多体系には熱平衡状態がない」ということ

「熱平衡状態がない」というのはそもそもどういうことか？

示し方はいろいろ、、、以下は1例

熱平衡状態の非存在 (続き)

古典統計である

したがって、速度分布関数はマックスウェル・ボルツマンでなければならない

これは不可能

自己重力系にある粒子のエネルギーは、定義からして無限遠での重力ポテンシャルの値を超えない

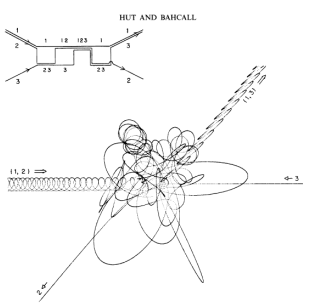
したがって、ある空間のある点での速度分布には必ず上限がある。

言い換えると、上限を超えた粒子は逃げていってしまう、、、

例 — 重力3体問題

2体問題では周期解になるだけで何も起きないので、3体問題。

重力3体問題の解の一例



重力3体問題(2)

全系のエネルギーが負で、全体としては自己重力で集まっている適当な初期条件(前の例では2つは連星というちょっと特別な例)から運動させる

しばらくは3つがそれぞれお互いの回りを運動する

そのうちに、粒子のうちの2つが強く結合した状態になり3つめがその反作用ではね飛ばされるという現象が起きる。

3体問題としては、これが「最終状態」

重力多体系の最終状態

粒子数が多い系でも、本質的には同じことが起きる。

つまり、粒子同士の散乱の結果、高エネルギーの粒子が作られるとそれは系から逃げていってしまうのである。

というわけで、統計力学からいえること:

重力多体系は、十分長い時間が立てば蒸発してしまう

しかし、これは間違いではないけど、でも、現実に存在している重力多体系の理解には役に立たない。

それでも、熱平衡状態について

まあ、それでも、やっぱり、熱平衡というものを考えたい

- いきなり非平衡とかいわれてもわけがわからない
- ある種の重力多体系では、熱平衡からそんなに遠くない状態が実現されている

というわけで、熱平衡状態がどういうものかを理解しておくことは極めて重要。

とはいえ、厳密には熱平衡はない。

熱平衡状態を作る

問題:どうやって、「本質」を失わないで熱平衡がある系に持っていけるか?

- 空間の次元を落す。
  空間1次元にすると、熱平衡がある。(粒子間ポテンシャルが無限大で発散するので)
- 空間は3次元のままで、エネルギー無限大でも逃げないようにする(壁をつける)

どちらもいろいろな人がいろいろなことをしている。

熱平衡状態を作る(2)

1次元系の話はいろいろ面白いが、今日は省略。興味がある人は、

Tsuchiya, Konishi and Gouda, PR, E50, 1996, 2210

Makino, J., astro-ph/9903238

などを見ること。

今日1次元系の話をしないのは、結局1次元系では3次元系で起きるいろいろな重要な物理が失われるから。

壁をつけるのは、「熱平衡がある」という他はあまり大きく現実と変わらないので、以下こっちの話。で、さらに話を簡単にするために壁は球対称とする。

熱平衡分布の熱力学的安定性

以下、熱平衡分布が安定かどうかを考える。

で、とりあえず流体の場合を考える。流体だと普通に温度や圧力、エントロピーとか考えられて、熱力学的な取り扱いができるから。

何に対して安定か:熱(エネルギー)の再分配を与えるような摂動に対して。

普通の統計力学では、平衡状態は安定に決まっている。

どこかから熱をとって、別のところに与える → とられたところは温度が下がり、もらったところは温度が上がる → とられたところには回りから熱が流れ込む、もらったところは流し出す → 等温に戻る。

自己重力系の熱力学的安定性

重力が働くと、そうとは限らない：

ここまでで求めた等温平衡状態：中心では重力をささえるために密度が高い。外側にいくほど密度が下がる。

↓

熱を奪われると、圧力が下がって少し収縮する

↓

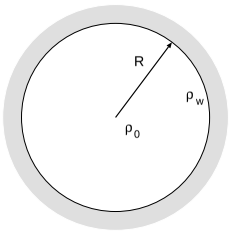
重力が強くなるので、もうちょっと収縮する

↓

回りより温度が上がる

ということが起こり得る。

熱力学的安定性（続き）



熱をとられて温度が下がる
＝「見かけの」比熱が負である

以下、線形安定性解析の結果を見ていくことにする。
改めて、絵を書いておく。
半径 R の中に質量 M のガスがあり、中心密度 ρ_0 と壁のところでの密度 ρ_w の比が D であるとする。

$D = 1$: 重力なし（温度無限大）

$D = \infty$: 特異解 $\rho \propto r^{-2}$

熱力学的安定性（続き２）

熱力学的安定性の解析方法はいろいろ：

- Linear series analysis (Chandrasekhar, Lynden-Bell and Wood 1968)：D を変えた時のエネルギーの変化を見る。極小値があれば、そこから先は熱力学的に不安定。
- 摂動を与えて、適当な制約のもとでエントロピーの２次の変分を見る (Hachisu and Sugimoto 1978)
- 摂動を与えて、その時間発展を見る（普通の線形解析, Makino and Hut 1991）

以下、３番目の方法に沿って話す。

定式化

熱伝導の式：

$$K\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2} \tag{131}$$

$L(r)$：半径 r のところでの熱流束

K ：熱伝導の係数

仮定：

$$K = \rho^{\alpha} \tag{132}$$

ここで、一応重力多体系に似せる：$\alpha = 1$

エントロピーの式など

エントロピーについての式：

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho T \frac{\partial s}{\partial t}|_M. \tag{133}$$

境界条件：

$$L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad \text{and} \quad M = 1. \tag{134}$$

線形化した方程式

微小な摂動に δ をつけることにして、線形化した方程式は

$$\frac{d\delta \ln p}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4}(\delta \ln p + 4\delta \ln r), \tag{135}$$

$$\frac{d\delta \ln r}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho}(3\delta \ln r + \delta \ln \rho), \tag{136}$$

$$\delta \ln p = \delta \ln \rho + \delta \ln T, \tag{137}$$

$$\delta s = \frac{3}{2}\delta \ln T - \delta \ln \rho, \tag{138}$$

$$\tag{139}$$

境界条件は

$$3\delta \ln r + \delta \ln \rho = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{140}$$

$$\delta \ln r = 0 \quad \text{for} \quad M = 1 \tag{141}$$

線形化した方程式 (2)

熱流束とエントロピーの変化については、もとの式が線形なのでそのまま使える。この方程式系に対して、以下の形をした解を捜す。

$$\begin{aligned}
\delta \ln p &= \delta \ln p_0 e^{\lambda t}, \\
\delta \ln r &= \delta \ln r_0 e^{\lambda t}, \\
\delta \ln \rho &= \delta \ln \rho_0 e^{\lambda t}, \\
\delta \ln T &= \delta \ln T_0 e^{\lambda t}, \\
\delta L &= \delta L_0 e^{\lambda t}, \\
\delta s &= \delta s_0 e^{\lambda t}.
\end{aligned} \tag{142}$$

添字 0 がついたものは時間発展解の空間依存性を表す。

固有値問題

$$\frac{d\delta \ln p_0}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4}(\delta \ln p_0 + 4\delta \ln r_0) \quad , \tag{143}$$

$$\frac{d\delta \ln r_0}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho}(3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0) \quad , \tag{144}$$

$$KT\frac{d\delta \ln T_0}{dM} = -\frac{\delta L_0}{(4\pi r^2)^2 \rho_0} \quad , \frac{d\delta L_0}{dM} = -\lambda T \delta s_0 \tag{145}$$

$$\delta \ln p_0 = \delta \ln \rho_0 + \delta \ln T_0 \quad , \tag{146}$$

$$\delta s_0 = \frac{3}{2}\delta \ln T_0 - \delta \ln \rho_0 \quad . \tag{147}$$

が出てくる。

境界条件

$$3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0 = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{148}$$

$$\delta \ln r_0 = 0 \quad \text{for} \quad M = 1 \tag{149}$$

$$\delta L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{150}$$

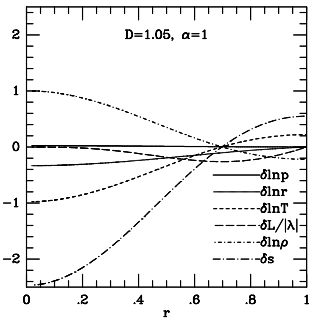
$$\delta L = 0 \quad \text{for} \quad M = 1 \tag{151}$$

ということになる。

解析結果 1

以下、結果。

安定な場合



λ: 固有値

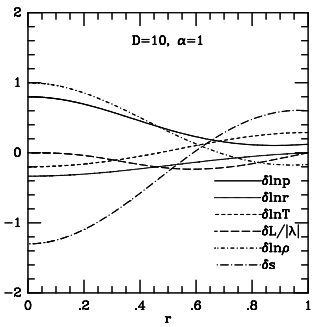
$D = 1.05$: 重力が無視できる場合。

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

解析結果 2

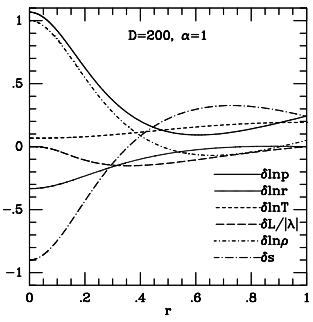
安定な場合 (2), $D = 10$



- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

解析結果 3

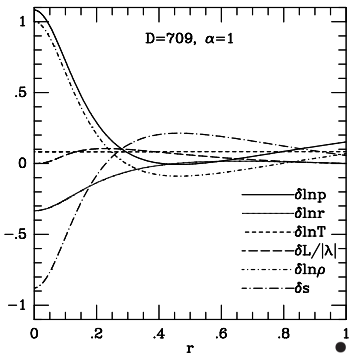
安定な場合 (3), $D = 100$



- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き (この場合中心の方が低温)
- 熱力学的には安定

解析結果 4

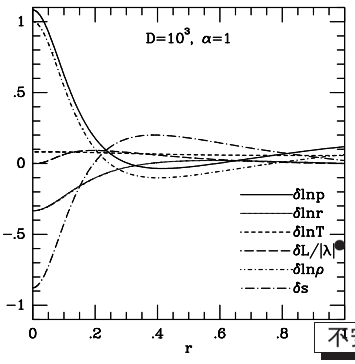
中立安定, $D = 709$



- 温度勾配ができない

解析結果 5

不安定, $D = 1000$



- 中心のほうが温度上昇が大きい

不安定になっている

結果のまとめ

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 gravothermal instavility という名前がついている。

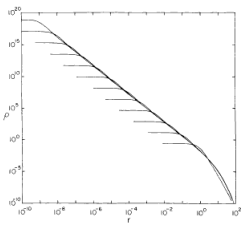
有限振幅の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：自己重力流体について数値計算した。

Lynden-Bell & Eggleton (1980): 流体の自己相似解を求めた

Cohn (1980): 流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。



ガスと N 体の違い

このあたりの進化、すなわち重力熱力学的不安定や自己相似解については、流体近似、フォッカー・プランク近似を使って分布関数の進化を数値計算する方法、N 体計算の間の一致は素晴らしくよい。

何故か、、、特に、流体近似がそれらしい結果を出す理由というのは、本当には良くわかっていない。

ミクロには、流体と多体系は全然違う。

流体：平均自由行程が短い。局所的には熱平衡

多体系：平均自由行程 (緩和時間 × 速度) が系の大きさより大きい。分布関数が局所的でない。(運動の積分の関数)

流体近似がうまくいかないとわかっている場合：

こういうのはもちろんある。

- 粒子が等質量ではない時
- 速度分布に非等方性が発達する場合

Linear Series Analysis と関係した話題

初めて不安定性が議論された時の方法: Linear Series Analysis

これは一体なにか？

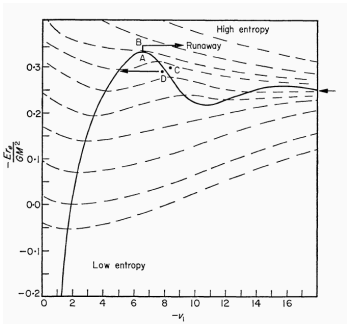
Lynden-Bell and Wood (1968, MNRAS 138, 495)

半径、質量一定の平衡形状の系列を考える。

実際に計算するには、等温解をどこか有限の半径で切ったもので、半径、質量等をスケールしなおせばいい。

とにかく、これで例えば中心と壁のところの密度比 D をパラメータとして系列がでる。

系の全エネルギー



横軸は $\ln D$、縦軸はエネルギー (符号逆)
D=709 でエネルギー極小 = 中立安定
そこから先は不安定

エネルギー極小と安定性

何故エネルギー極小が中立安定だったり、そこから先が不安定だったりするのか？

あんまり自明ではない。 (原論文の説明も要領を得ない)

一応、中立安定点には以下のような解釈が可能

エネルギー極小点: エネルギーを変えないで (断熱的に) D を (微小量) 変えることができる。

つまり、系を等温に保つ摂動で、エントロピーを保存して構造を変えるものがある。

つまり、中立安定な摂動がある。

線型安定性解析との関係

中立安定点では、ゼロ固有値に対応する固有関数は温度勾配を作らないものであった。

従って、中立安定点を探すだけなら、摂動を温度勾配を作らないものに制限してかまわない。

逆に、温度勾配を作らない摂動は、熱平衡状態を熱平衡平衡状態に移すものしかない。

従って、エネルギーを保存して温度勾配を作らない摂動は、エネルギーが極値を取るところにしかない。

と、これはいいけど、中立安定点より先がどうなってるかは linear series analysis では本当は良くわからない。

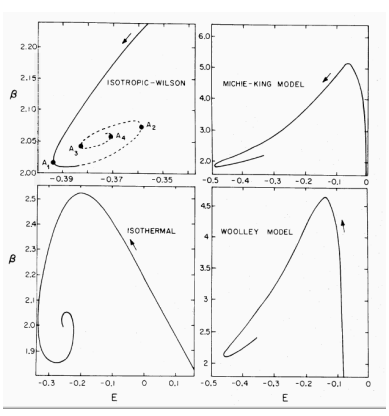
Linear Series Analysis が危ない例

固有値問題を解くのと違って、 Linear Series Analysis は平衡系列を求めるだけでできちゃうので、いろいろな論文が発生する。

- Katz 1980, MNRAS, 190, 497
- Taruya and Sakagami, 2002, Physica A, 307, 185

他にもいろいろあるけど、影響が割合大きいものということで。

Katz 1980



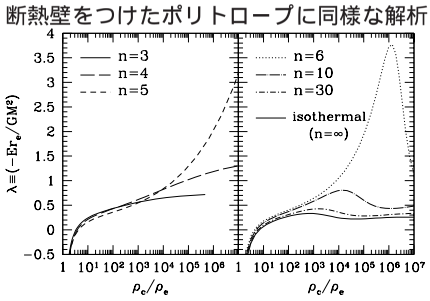
King model の系列に Linear Series Analysis を適用。

「中立安定点」を「発見」($W_0 \sim 12$)

もともと等温平衡解ではないもの:
エネルギー一定の摂動が中立安定に対応するわけではない。

Taruya & Sakagami 2002

断熱壁をつけたポリトロープに同様な解析を適用



$n \geq 5$ で「不安定性」発見

Taruya & Sakagami 2002 再考

実際には彼らは単にポリトロープをなんかしたわけではない。

Tsallis エントロピー $(f^q - f)/(q-1)$

普通のエントロピー $f \ln f$) を $q \to 1$ の極限として含む、「一般化された」エントロピー。

これの極値を取る分布 $=$ ポリトロープ(q と n は対応する)

そういうものを考える意味: 正直にいって「よくわからない」

Tsallis エントロピー極値は熱平衡であるわけではないので、「安定性」に意味があるわけではないのは King model の場合と本質的には同じ。

自己相似解の後の進化

自己相似解：有限時間で中心密度が発散

「その後」どうなるか？が問題

- 球状星団
- 矮小銀河の中心部
- 普通の銀河の中心部 (？)

今までに密度が発散しているはずのものもある。

- 途中でブラックホールに、、、(普通の球状星団では難しい)
- 連星によるエネルギー供給で反転

連星

連星： 3 体散乱で確率的にできる (3 つ粒子があれば、そのうち 2 つを連星にして重力エネルギーをとり出した方がエントロピー的には得なので)。

普通の星の中心での核融合と同様にエネルギー供給として働く

→ 収縮を止めて、安定な定常状態になる？

数値計算

Henon (エノン・ハイレスのエノンと同一人物) (1975): モンテカルロ法 (といっても、メトロポリス法みたいなのとは全然違う、、、詳しくは後述) での計算にエネルギー供給を人為的に入れて、ホモロガスに膨張する解を得た。

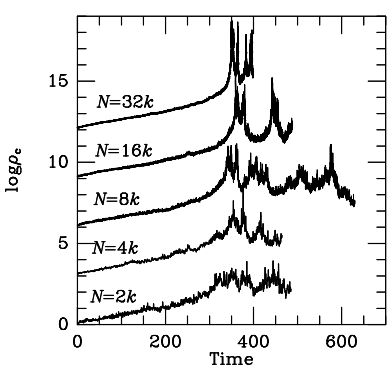
Heggie 1984, Goodman 1984: 同様な結果

Sugimoto and Bettwiser 1983: ホモロガスに膨張が実は不安定であることを、流体近似の数値計算から「発見」

1985 年には他のグループも確認、 1986 年にはフォッカープランクでも確認。

N 体計算

1996 年：N 体計算でも確認



まとめ

あんまりまとめではないですが、、、一応、ここまでで、重力多体系の進化のメカニズムを「概観」したということで、ここから数値計算法の話にはいることにします。