計算機の中に宇宙を作る
— 重力多体系とその周辺
2回め

牧野淳一郎

(6/1 から国立天文台理論研究部)

講義概要

1. 「理論」天文学の目指すもの
2. 天体現象の特徴
3. 自己重力多体系
   - 太陽系とその安定性
   - 宇宙膨張と銀河形成
   - 重力熱力学的不安定
4. 最近の研究から — ブラックホールのある系について
5. 計算機の話

事務連絡：

レポート課題

この講義を聞いた感想、教官への希望等を A4 レポート用紙 1 枚程度（1000 字程度）にまとめて、以下のアドレスにメイルで提出すること。

`makino@th.nao.ac.jp`

MS-Word のファイルで送ってくれるとこちらで読むのが面倒なので、これは避けて欲しい。普通のメイルの文章、LaTeX、 HTML、 PDF はOK。

紙で次の回担当者に渡してくれても OK。

レポート提出期限は一応 2週間後(6/22)とする。

なぜ銀河は潰れないか？

太陽系 太陽が圧倒的に重い — 2 体問題+摂動

一般の3体問題：不安定

安定（最終）状態：2体の連星 + もう一つ（無限遠に飛ばされる）

銀河ではなにが起きるか？

銀河の「分布関数」

星の数（粒子数）が無限に大きい極限：

星の「分布」を考えることができる。

$f(x, v)$ ： 6 次元空間のある領域に粒子がいくつあるか？つまり、

$f(x, v)dxdv$ がある「体積」 $dxdv$ の中の星の数を与えるとする。いま、簡単のために星の質量はみんな同じとする。

分布関数の従う方程式

運動方程式から分布関数についての偏微分方程式への書き換え：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{1}$$

ここで Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解。

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{2}$$

ここで、 G は重力定数である。

分布関数の従う方程式（続き）

ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int dv f, \tag{3}$$

である。

この書き換えは難しいことではないんだけど、「面倒臭い」ので導出はここでは省略。

力学平衡

星の数が無限に大きい極限を考えると：

一つ一つの星は動くけれど、全体としてみた

- 分布関数
- 従って、星が全体としてつくる重力場

は時間がたっても変わらないような状態というのがありえる（一般にいつでもそうというわけではもちろんない）

これを「力学平衡状態」という。

銀河が潰れないわけ

銀河とかがどうして潰れてしまわないかという問題にたいする形式的な答：

ほぼそのような「力学平衡状態」にあるから

まあ、これはちょっと言い換えでしかないところもある。つまり、依然として

- なぜそのような状態に到達できるか？
- 到達できるとしても、どのような初期状態から始めたらどのような平衡状態にいくのか？

はよくわからない.

なぜ力学平衡にいくのか？

第一の問題に対する一般的な答：

初期状態が特別の条件をみたしていない限り、振動があったとすればそれは急激に減衰するので定常状態にいく。

（但し、回転があると別：渦巻銀河、棒渦巻銀河、、、）

前に見せた銀河形成のシミュレーションはその一例。

初期条件と力学平衡の状態の関係

あまり役に立つことはわかっていない。初期条件と最終状態の間の関係をいろいろ調べている段階。

このへんは、基本的には前にいった数値計算でやられる。

- 1996 年頃に、宇宙論で考えるような初期条件の範囲内ではいろいろパラメータを変えてもできるものはみんな同じであるというシミュレーション結果が出た。
- が、この結果は実は間違い であったことが、より大規模なシミュレーションからわかった。

というわけで、わかっていない問題は非常に多い。

もう一つ大きな問題

星の数は実際には無限大というわけではない。

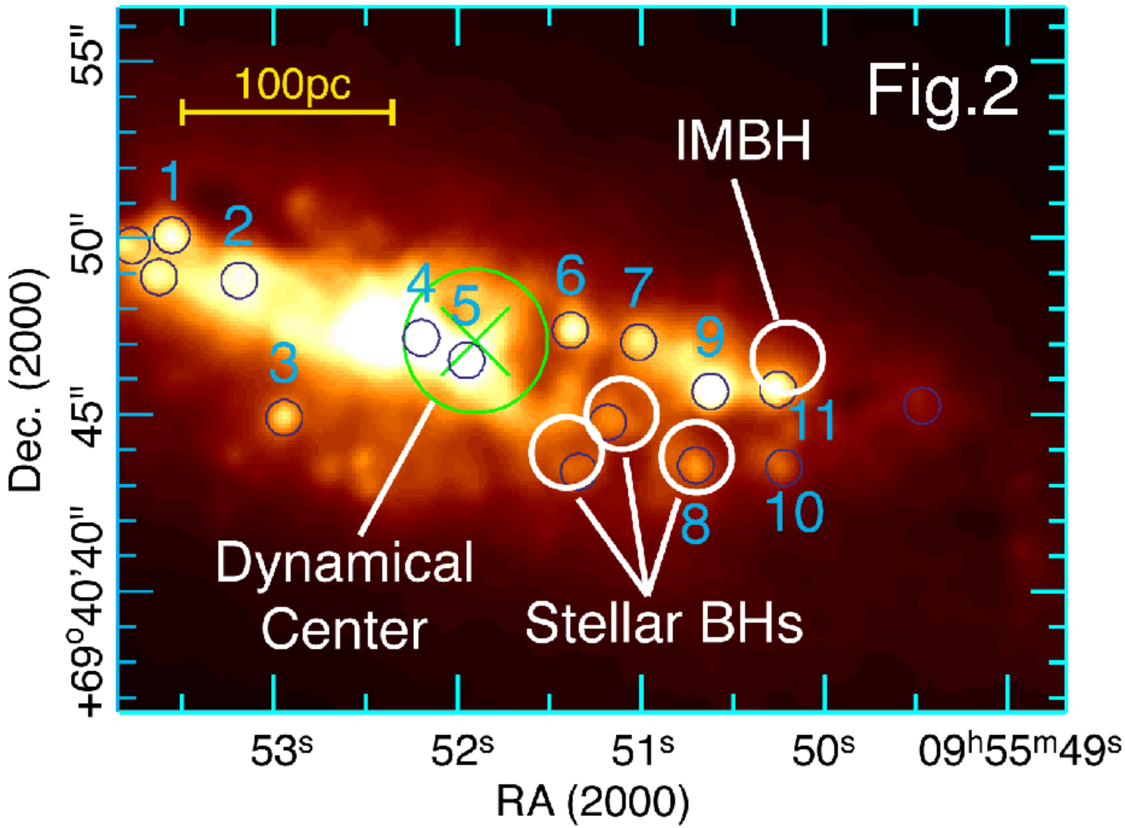
銀河： 10^{10} かなり多い、

散開星団、球状星団 $10^{4\sim6}$

銀河中心 巨大ブラックホール$+10^7$個程度の星

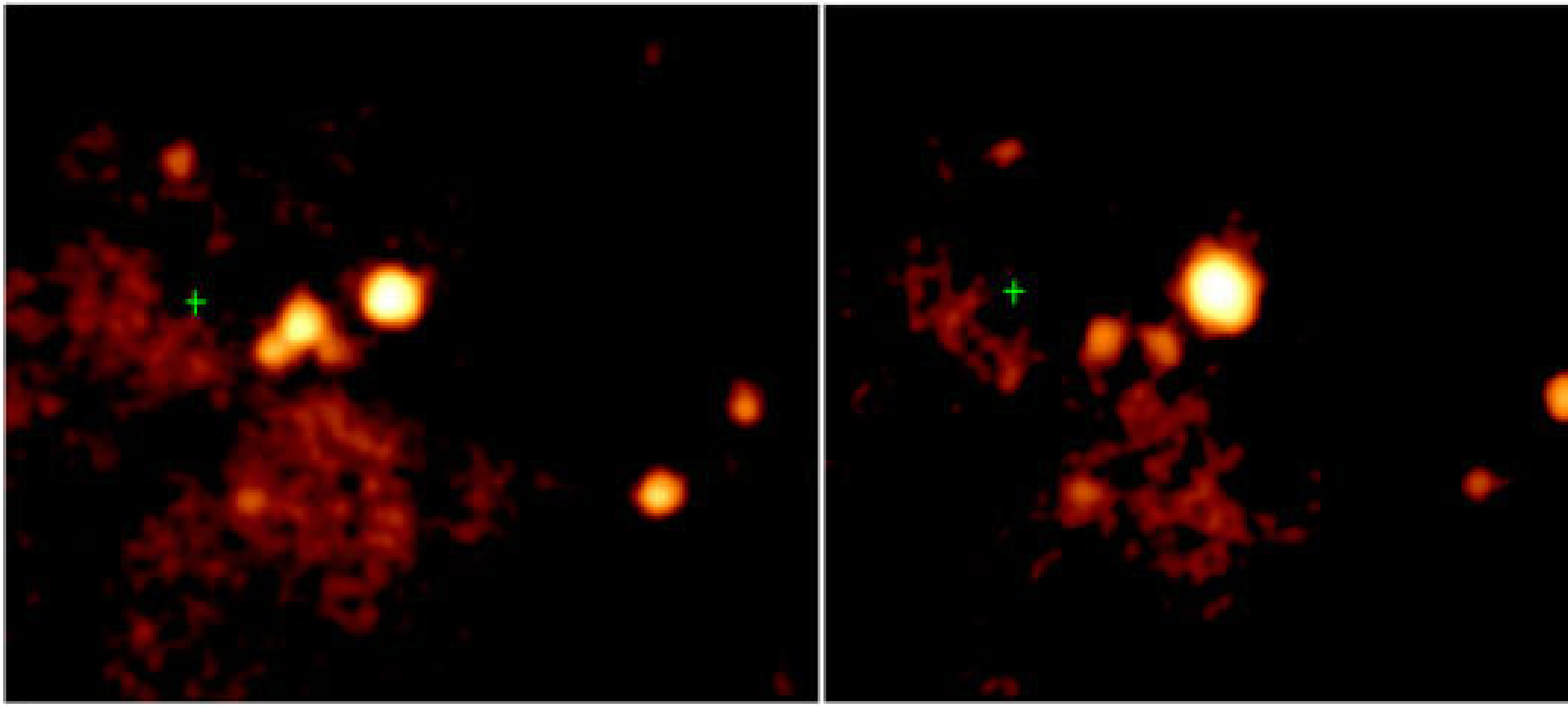
こういったところではどういうことが起きるか

銀河中心



近傍の銀河 M82 の中心部の「すばる」望遠鏡による写真

X線では



NASA Chandra X線衛星による写真

こういったところではいったい何がおきているか？

無限には星が多くない時

厳密には力学平衡にない

→それぞれの星の軌道はだんだん変わっていく

物理的には大自由度のハミルトン力学系

→統計力学的（熱力学的）に振舞うはず

つまり：熱平衡状態（エントロピー最大）にむかって進化するはず。

（普通の気体なんかと同じ）

普通の気体との違い

- 重力のエネルギーは質量の 2 乗に比例
- 粒子を閉じ込めておく箱（境界）があるわけではない

2 つ違うとよくわからないので、違いを一つにしてみる。

具体的には：仮想的に球形の断熱壁でかこんだなかの理想気体を考える。

重力の効果があるくらい大きいもの。

断熱壁の中の理想気体

温度（熱エネルギー）が重力エネルギーよりもずっと大きい状態

これはもちろん重力がない時と変わらない

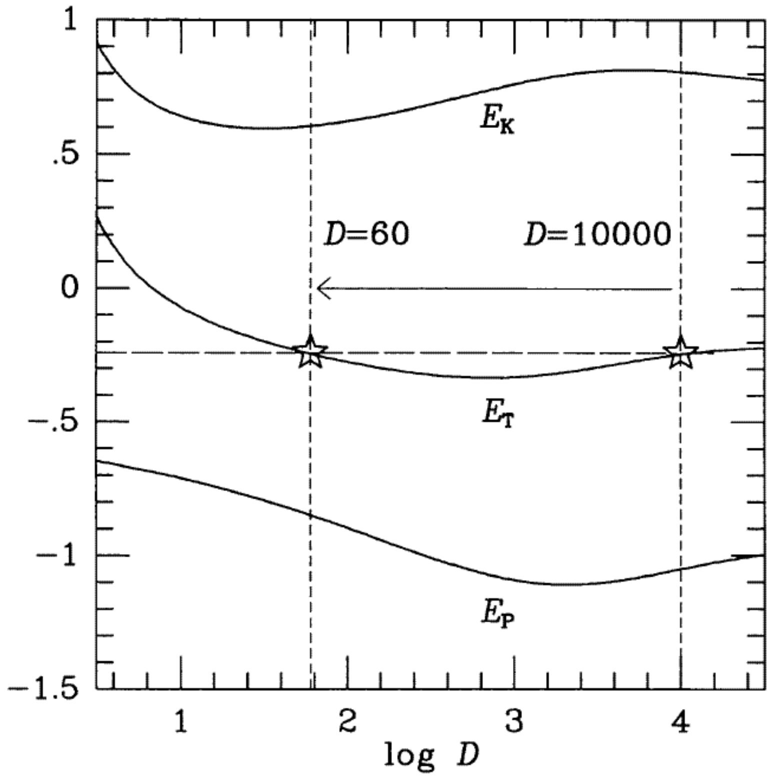
温度を段々下げていく（エネルギーを抜いていく）

↓

重力の効果が出てくる。

具体的には、中心の密度が上がって、壁のところが下がる。これは、重力と圧力勾配を釣り合わせるため。地球の大気が上にいくほど薄くなるのと同じ。

エネルギーの下限



計算してみるとどこまでも温度を下げられるわけではない。
図に結果を示す。これは横軸に中心と壁の密度の比、縦軸にエネルギーをとったもの

熱平衡状態

$D = 709$ でエネルギーが最小になり、それ以上エネルギーが低い平衡状態はない。

さらに、エネルギーのほうから考えてみると、あるエネルギーに対してそれに対応する平衡状態が 2 つ以上あるところがある。

- もっとエネルギーが低い状態は？
- D が大きいところはいったいなにか？

密度比が限界より大きい状態

これは「熱力学的に不安定な平衡状態」になっている。

安定／不安定：何度も出てきたが、ここでは「熱力学的」

温度が一様な平衡状態に、すこし温度差をつけてやる（熱エネルギーを移動してやる）

- もとに戻る：安定
- 戻らない：不安定

熱力学的安定性

普通の世の中のもの：戻るに決まっている。

熱をもらった方は温度が上がる。

とられたほうは温度が下がる。

熱い方から冷たい方に熱がながれるので、元に戻る。

ところが､､､重力が効いているとそうなるとは限らない。

熱力学的不安定性

条件によっては以下のようなことが起こる

中心部から熱を奪う → 温度／圧力が下がる → 圧力を釣り合わせるために収縮 → 重力が強くなる → もっと収縮 → 結果として温度が上がる。

これが起きると、熱を奪われた方が温度が上がるので、ますます熱が流れだし、いっそう温度が上がるという循環にはいる。

これを、「重力熱力学的不安定性」という。

どうやって安定性を調べるか

「重力熱力学的不安定性」：

計算機によって安定性を調べることで初めて発見されたもの。

「計算機で安定性を調べる」というのはそもそもどういうことかという原理的な話をすこしだけしておく。

安定性解析の原理

ここで問題なのは適当な偏微分方程式（系）

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(f(x)) \tag{4}$$

(ここで、 A はなんか適当な「汎関数」。具体的には、例えば普通の熱伝導なら f の空間２階微分)

の定常解 $f_0(x)$ があったとする。

定義により $A(f_0(x)) = 0$

少しずれた $f = f_0 + df$ 、df の方程式を作る。

線形化(1)

df に何か入れればそれがどうなるかが計算できる

あらゆる可能な df について調べる？

そんなことがどうやってできるか？

これを可能にする方法が線形化して固有値問題にするということ。

線形化(2)

仮定: df が f_0 よりもずっと小さい

df について線形な式にできる。

線形:

$$\frac{\partial df}{\partial t} = B(df(x)) \tag{5}$$

という形だったとして、

$$B(\alpha df_1(x) + \beta df_2(x)) = \alpha B(df_1(x)) + \beta B(df_2(x)) \tag{6}$$

という性質を満たすということ。

線形化 (3)

もうちょっとわかりやすくいうと、

df_1 が解なら df_1 の定数倍も解

df_1, df_2 が解なら $df_1 + df_2$ も解

ということ。

固有関数

このように線形な方程式には、固有値、固有関数というものがある。

固有関数は、

$$\lambda df = B(df) \tag{7}$$

の解。λ が固有値。

この時、時間発展が $df = e^{\lambda t} df_0$ の形に書ける。

一般には任意の関数が固有関数の重ね合わせで書けるので、これら固有関数だけを調べればいいことになる。

固有値って何？

線形代数でやった？まだ？

偏微分方程式の固有値、固有関数: 行列の固有値、固有ベクトルと非常に良く似たもの。

数学で線形代数をする理由: これらの偏微分方程式を扱うための道具として。

そのへんの説明なしに線形代数の講義とかされても意味がわからないかも、、、

固有値と安定性

これの解（固有関数）は一般には無限個ある。

対応する固有値λも無限個ある。

「もっとも大きい固有値」から順に求めるような計算方法があるので、求まった最大の固有値が負（実数部分が）であれば安定ということになる。

もうちょっと具体的な計算法

まず f_0 自体が必要。

空間も細かい刻みにわけて、その各点での値を近似的に計算する。

出てくるのは連立方程式になる。これを計算機を使って解く。

f_0 が求まると、それを使って df についての方程式を具体的に書ける。

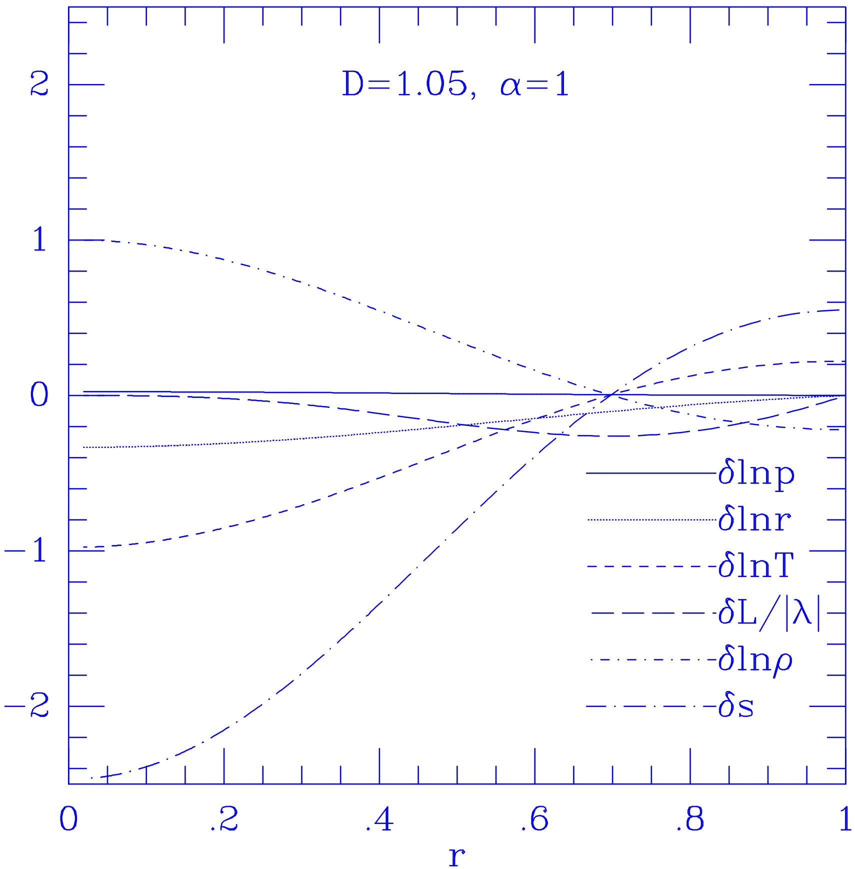
df についての方程式

これもやっぱり連立方程式になるが、線形であることから連立一次方程式になる。つまり行列でかける。

この行列の固有値、固有ベクトルを求めると、元の問題の固有値、固有関数の近似値になっている。

と、なんかややこしいが、計算機で安定性を調べるという時にはだいたいどんな分野でも同じようなことが出てくるので、ちょっと詳しく書いてみた。

安定な場合, $D = 1.05$

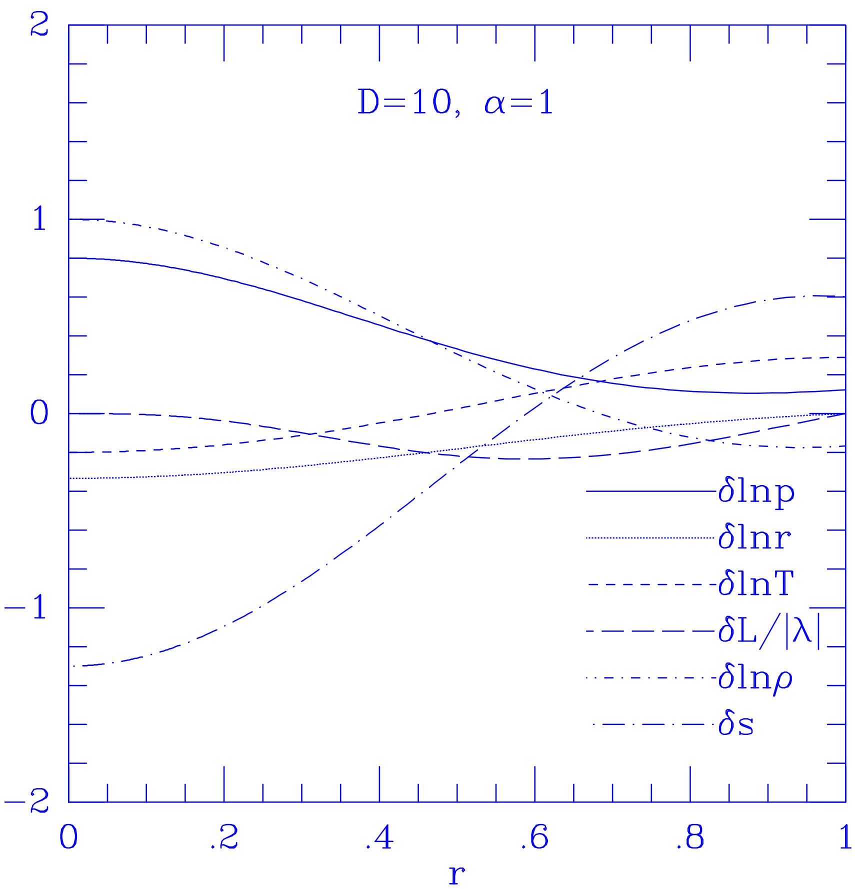


λ: 固有値

- **圧力は変化しない**
- **エントロピーと温度が比例**

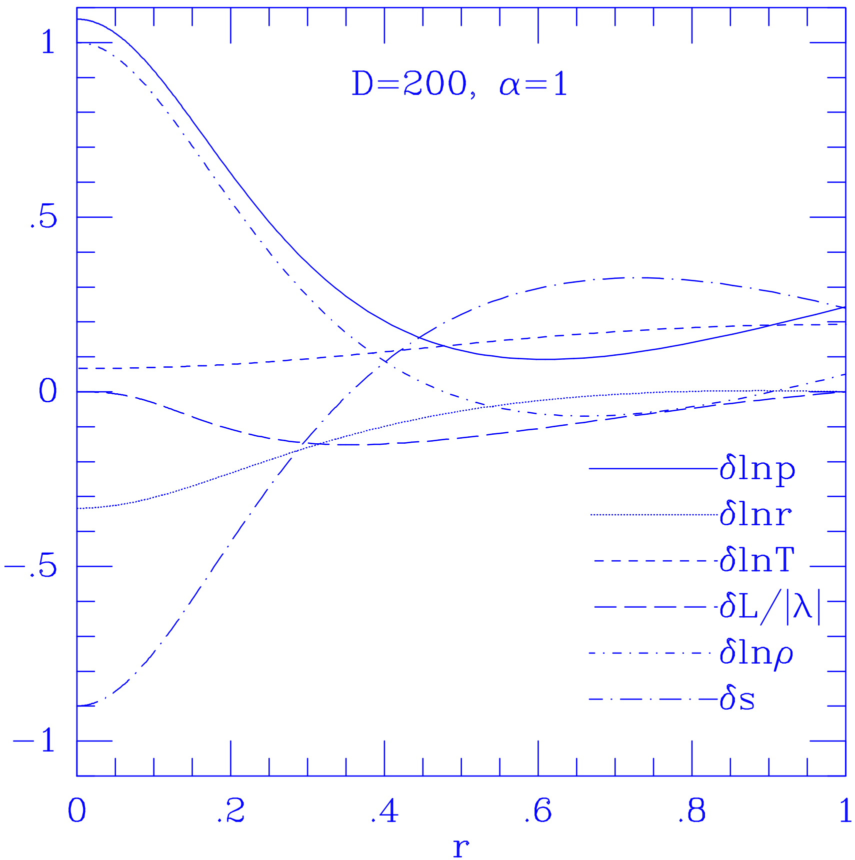
要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

安定な場合(2), $D = 10$



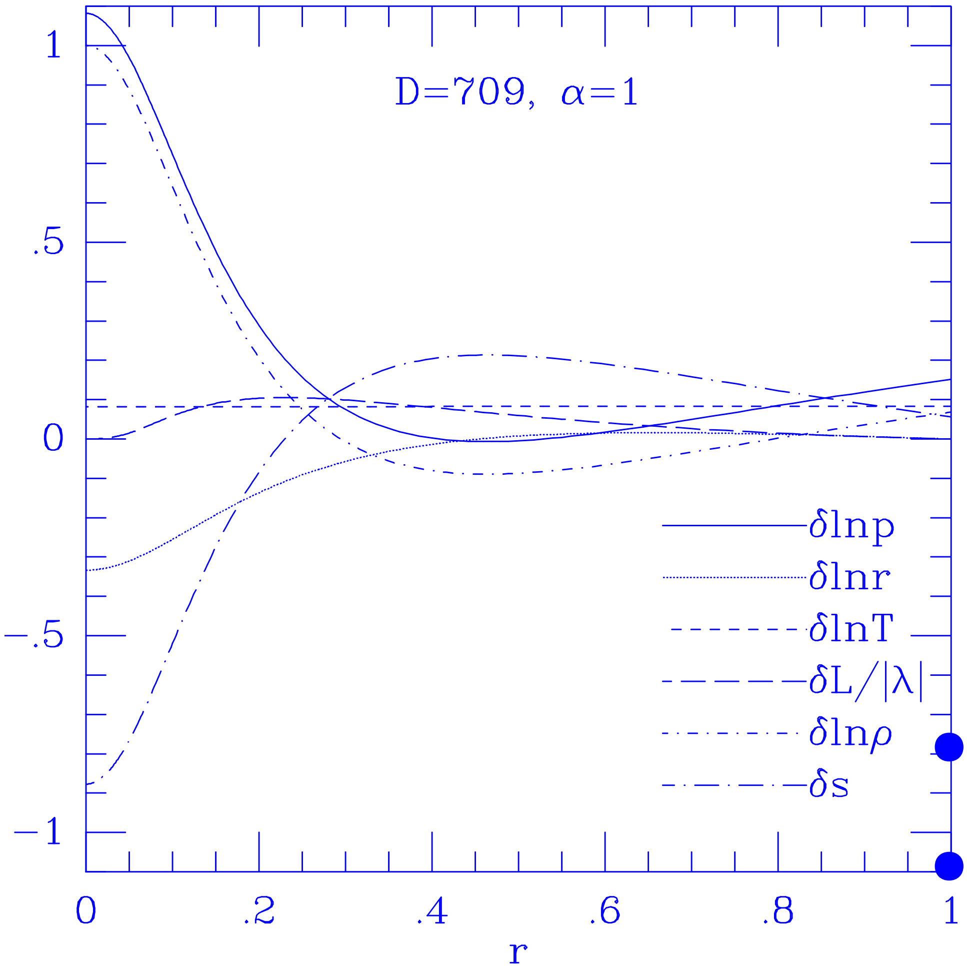
- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

安定な場合(3), $D = 100$



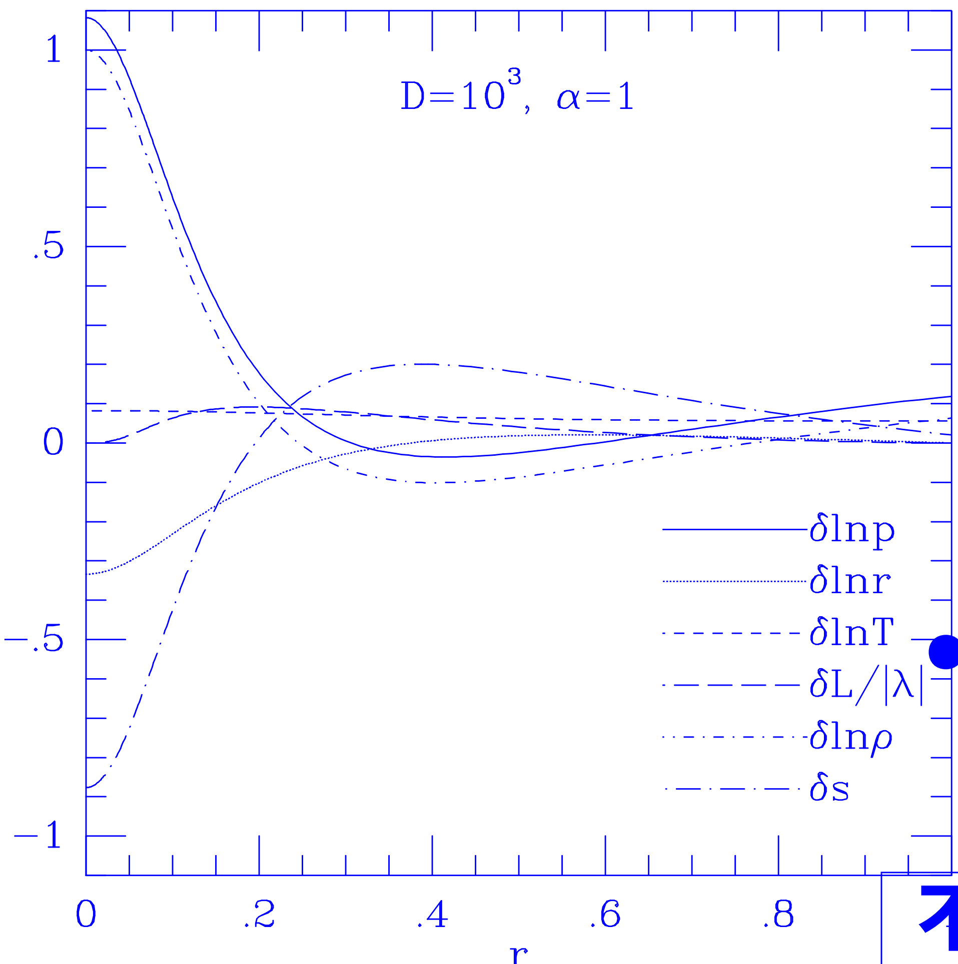
- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

中立安定, $D = 709$



- 温度勾配ができない
- したがって、摂動がもとに戻らない

不安定, $D = 1000$



- 中心のほうが温度上昇が大きい

不安定になっている

重力熱力学的不安定性

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 gravothermal instavility という名前がついている。

発見： V. Antnov (1961)

上のような安定性の明確な定式化: Hachisu & Sugimoto (1978)

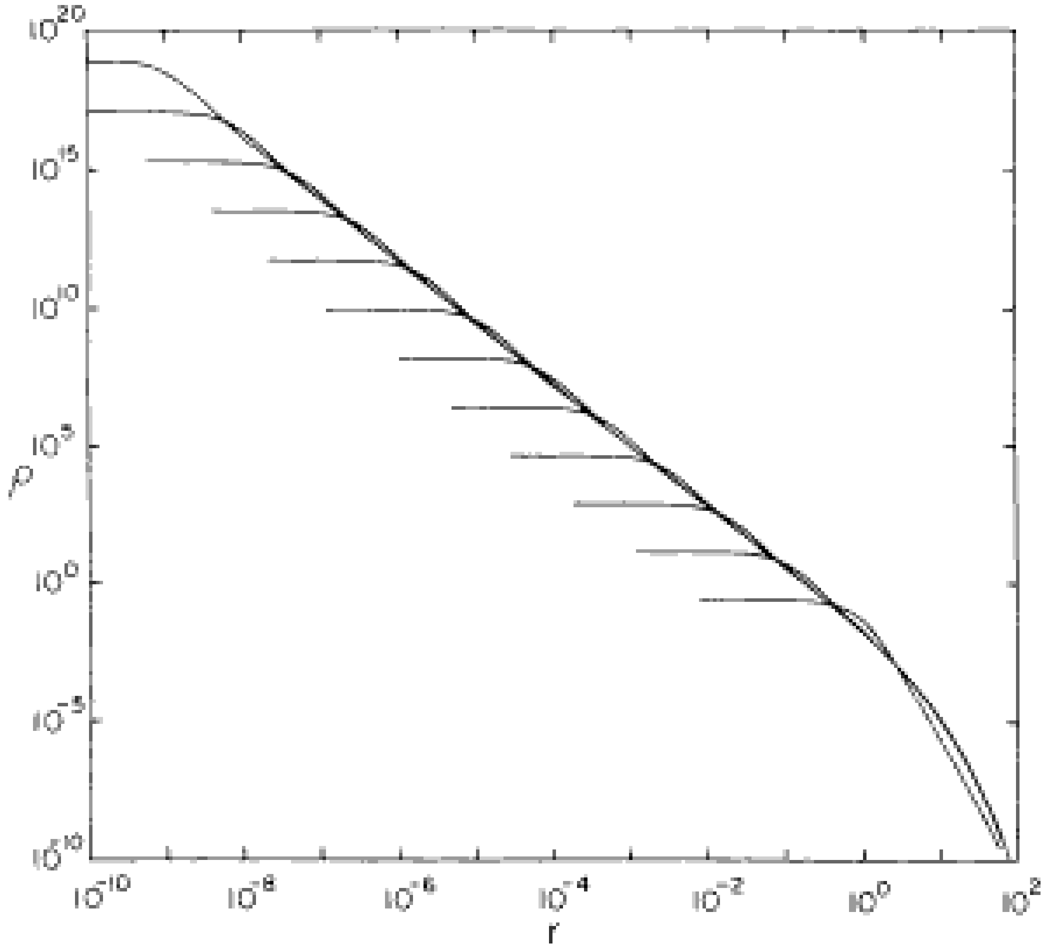
もっと先の進化

摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：自己重力流体について数値計算した。

Cohn (1980): 流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。

自己相似解



10^{20}
10^{15}
10^{10}
10^{5}
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
ρ
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
r

最終状態？

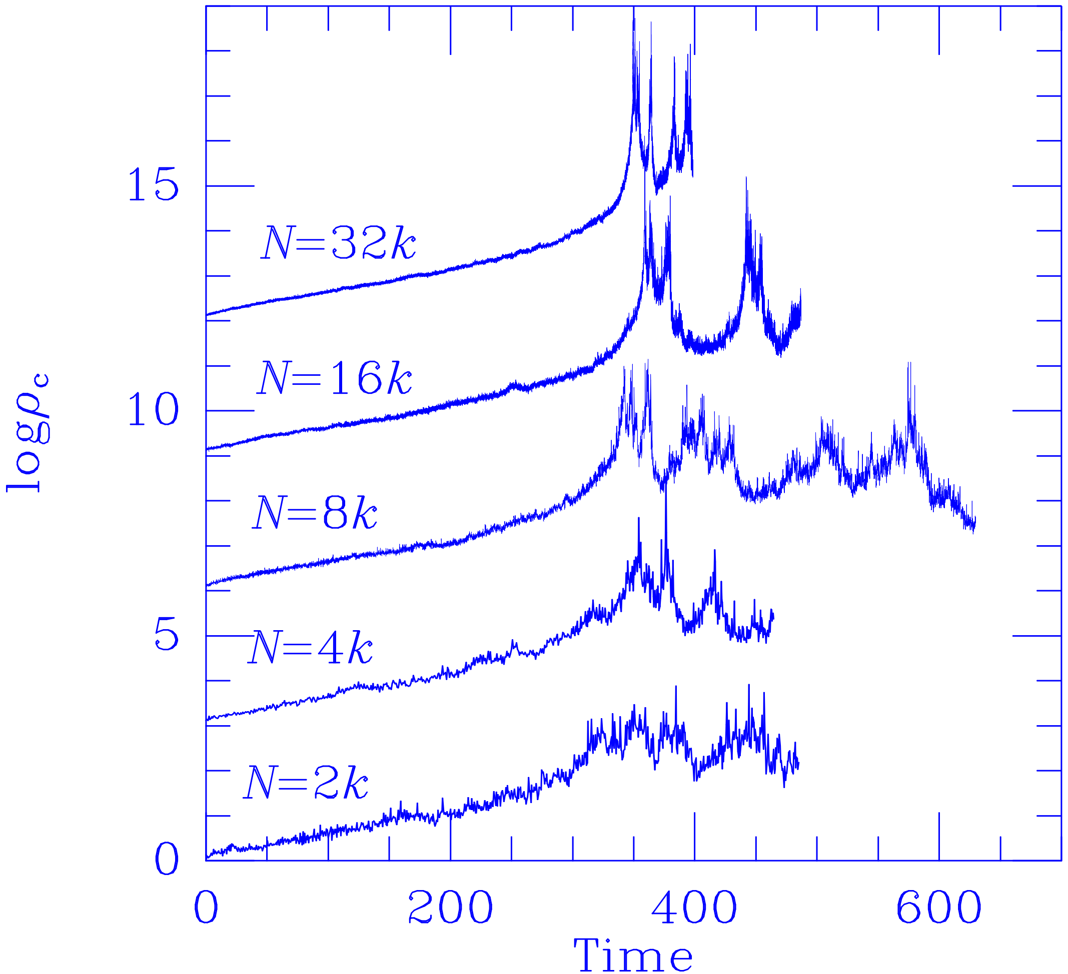
中心部の密度が非常に上がってくると､､

- 星同士の近接遭遇
- 3 星が同時に近付く

連星ができる。これは「エネルギー放出反応」（核融合と同じ）

これにより、今度は中心部が膨張を始めると理論的には予測されている（重力熱力学的振動）

重力熱力学的振動



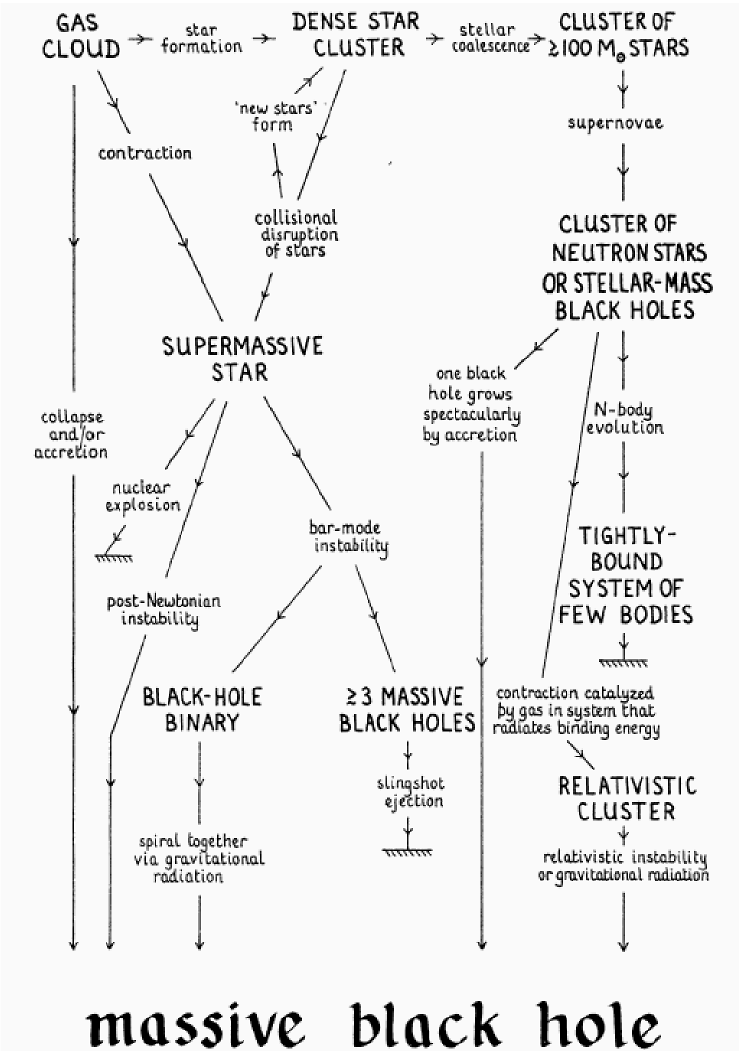
球状星団の中心部ではこのようなことが起こっている可能性が高い。

最近の研究から — 中間質量ブラックホールの形成モデル

(Nature Vol 428 No 6984 724-726, “Formation of massive black holes through runaway collisions in dense young star clusters”)

1. はじめに:大質量ブラックホールの作り方
2. M82 の IMBH 候補
3. 合体シナリオ

はじめに:大質量ブラックホールの作り方



Classic View (Rees 1984)

本質的には 2 通り

- **単一の超大質量星**
- **コンパクト星の高密度クラスターの熱的な進化**

どちらも簡単ではない...

単一の超大質量星の問題

そんなのができるか？

- 一様・球対称からのコラプス
- 小さいスケールの密度ゆらぎがない
- 潮汐場もない

とかいう極めて理想的な条件ならば、単一ガス雲が単一ブラックホールになるかもしれない。

高密度クラスターの熱的な進化の問題

熱力学的な進化 (重力熱力学的崩壊)
$\longrightarrow$ 非常に小さいコアになる (大質量ブラックホールはできない)。

何故かはじめから相対論的なクラスタがあれば話は違うが、、、

- コンパクト星同士の合体は滅多におこらない
- バイナリは 3 体相互作用で系から打ち出される

というわけで merger 自体が稀

理論はともかく

観測的にギャップがあるのが問題: やはり完全に空中楼閣を作るのは (よほど物理が単純でないと) 難しい。

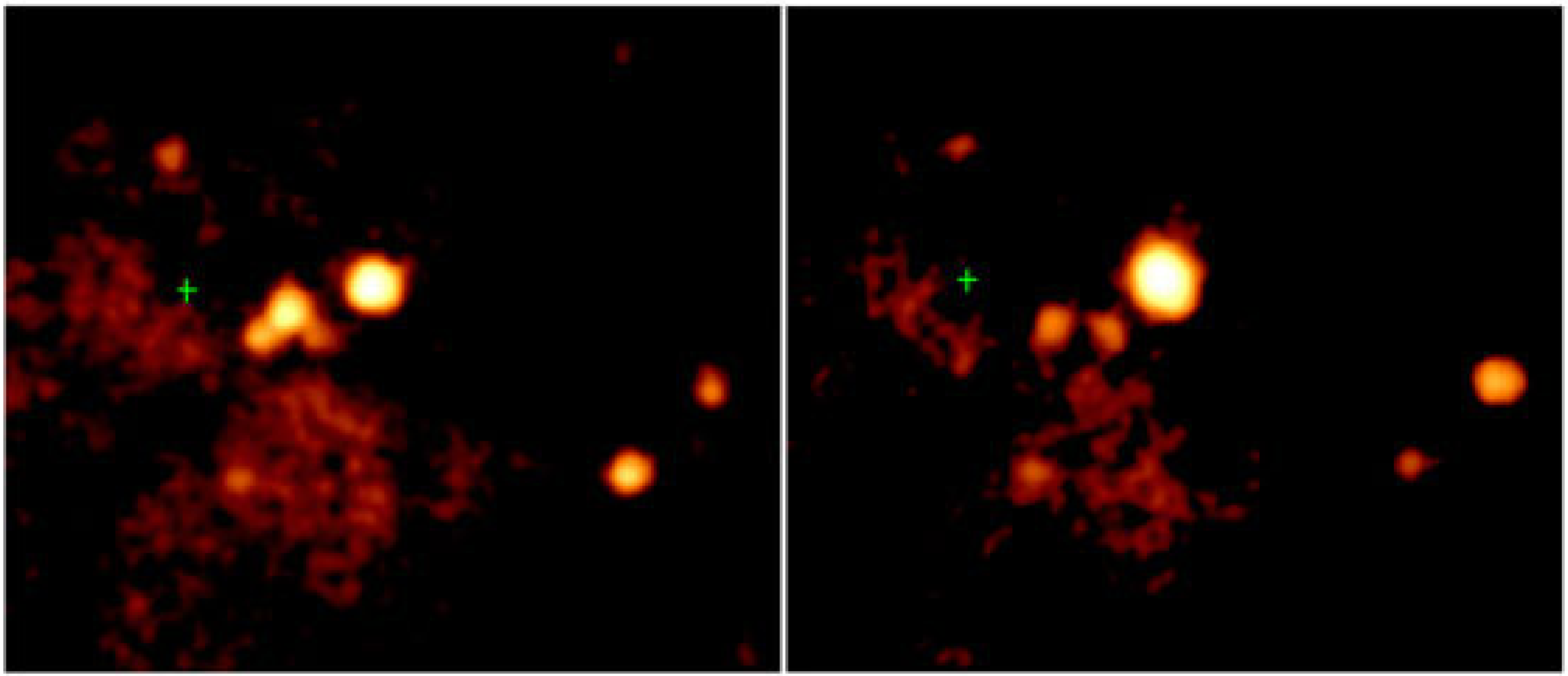
観測的なギャップ

- 恒星質量 $\mathrm{BH} \sim 10 M_{\odot}$
- 超大質量 $\mathrm{BH} > 10^6 M_{\odot}$

中間は ???

M82 の中間質量 BH 候補

Matsumoto *et al.* **ApJL 547, L25**



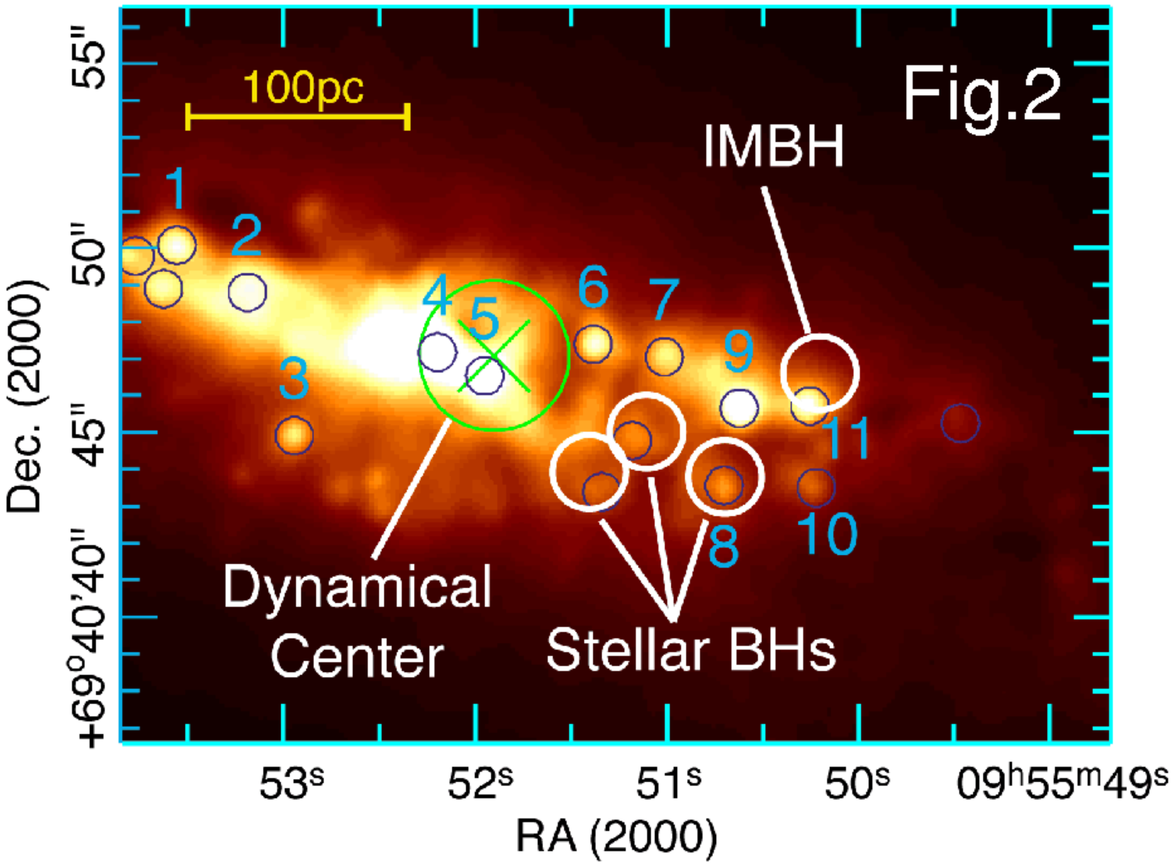
大きな時間変動を示す複数のソース

M82 IMBH (候補) の意味

- **最初の** (でもって依然唯一の) 質量が $>> 10$, $<< 10^6$ の BH 候補天体
- エディントン質量 $\sim 700 M_\odot$ = 最初の IMBH (intermediate-mass BH).
- M82 の中心から 200 パーセクくらい離れている: 銀河中心の BH そのものではない

赤外線での対応天体

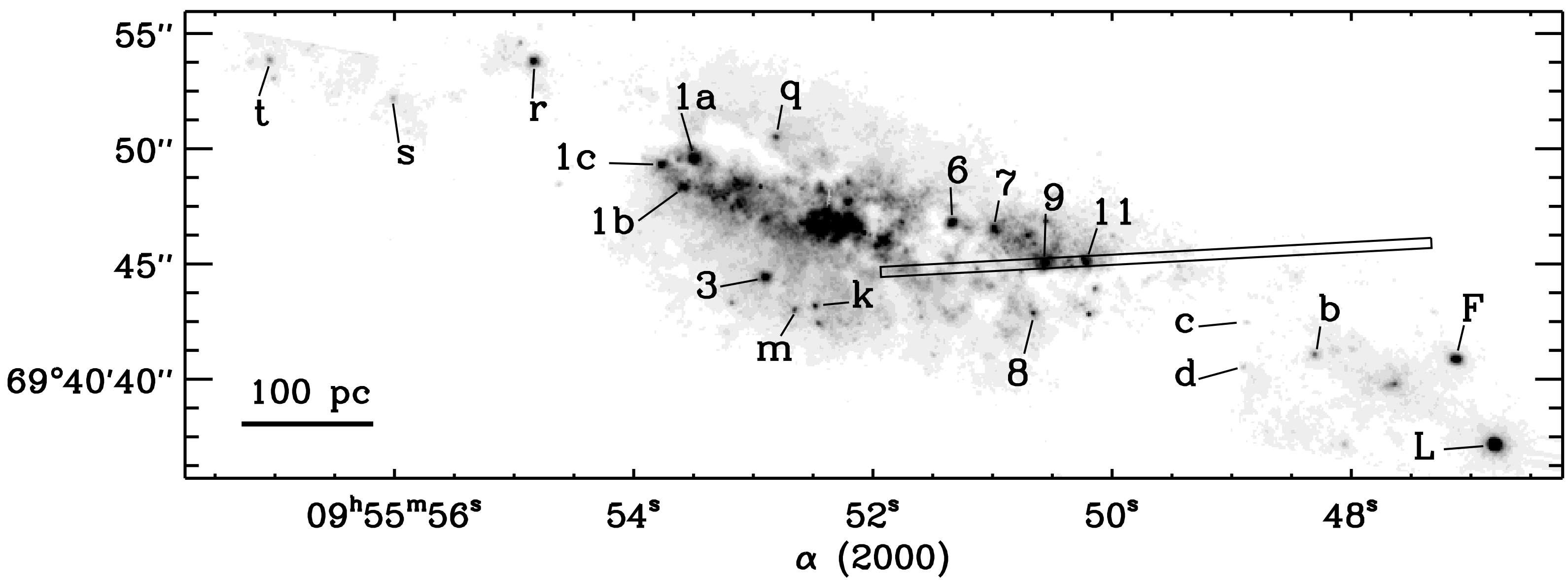
M82 のすばるによる観測 (K’ band)



赤外線での対応天体(2)

HST NICMOS/Keck NIRSPEC

McCrady et al. (astro-ph/0306373)



スターバーストで最近出来た非常に若い星団。

IMBH は星団の中にある？

(理論家の目には) IMBH は若くてコンパクトな星団の中にあるというのは「明らか」。

では、 IMBH はどうやってできたか？

How IMBHs were formed?

- 星団と同時に出来た？(あんまりありそうにない)
- 星団の中で作られた。

ホスト星団の力学的な特徴

McCrady et al. 2003 (astro-ph/0306373)

Cluster #11 (MGG-11)

- $\boldsymbol{\sigma_r = 11.4 \pm 0.8}$**km/s**
- **half-light radius** $\mathbf{1.2 \pm 0.17}$**pc**
- **kinetic mass** $\mathbf{3.5 \pm 0.7 \times 10^5} \boldsymbol{M_\odot}$
- **Age** $\sim$ **10Myrs.**

M/L **が割合低い (軽い割に明るい)**

緩和時間非常に短い ($<$ **10 Myrs)**

一つの可能なシナリオ

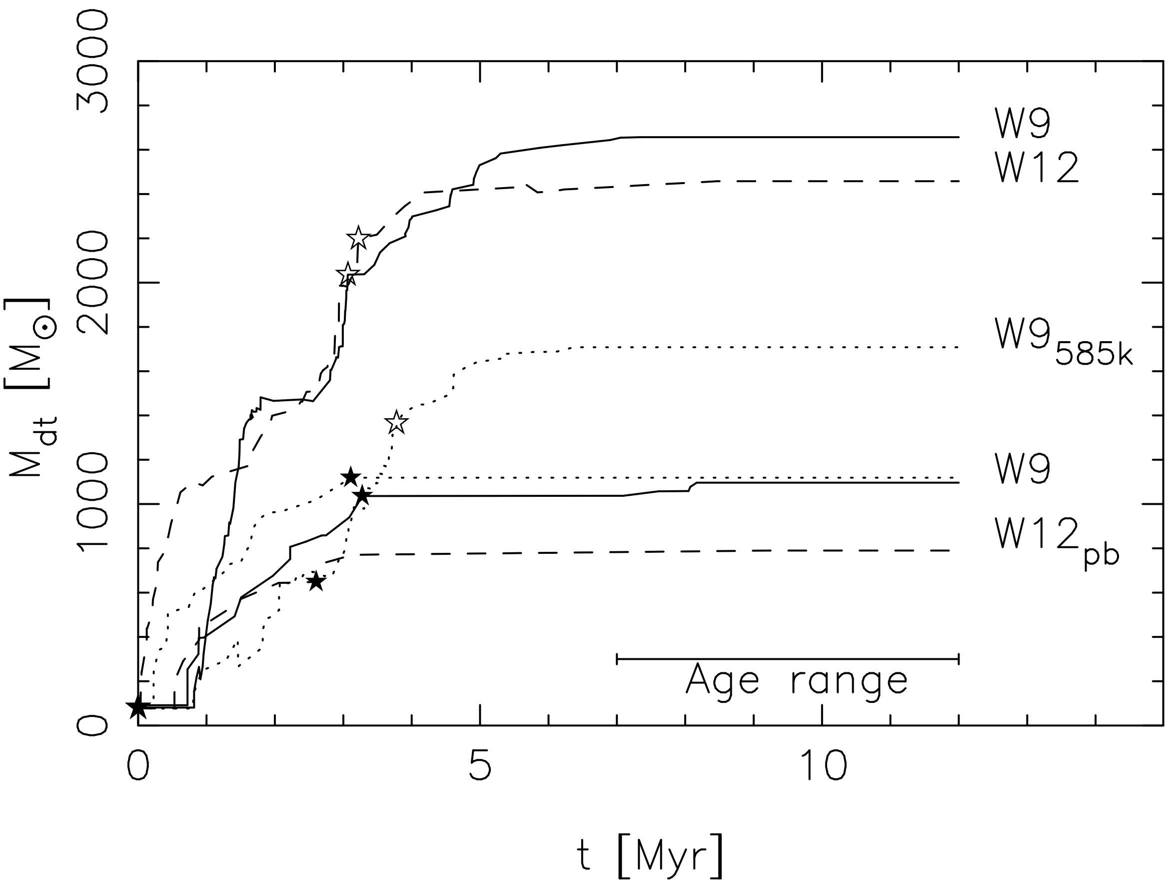
1. 星団の中心で星の暴走的な合体で大質量星ができる
2. この星のコラプスで IMBH (の種) ができる
3. この IMBH (の種) がさらに他の星と合体して成長

シミュレーション

初期条件

- **King model with W_0 = 7-12**
- **Salpeter IMF (as suggested by McCrady et al)**
- **Star-by-star simulation for MGG-11 (MGG-9 is scaled)**

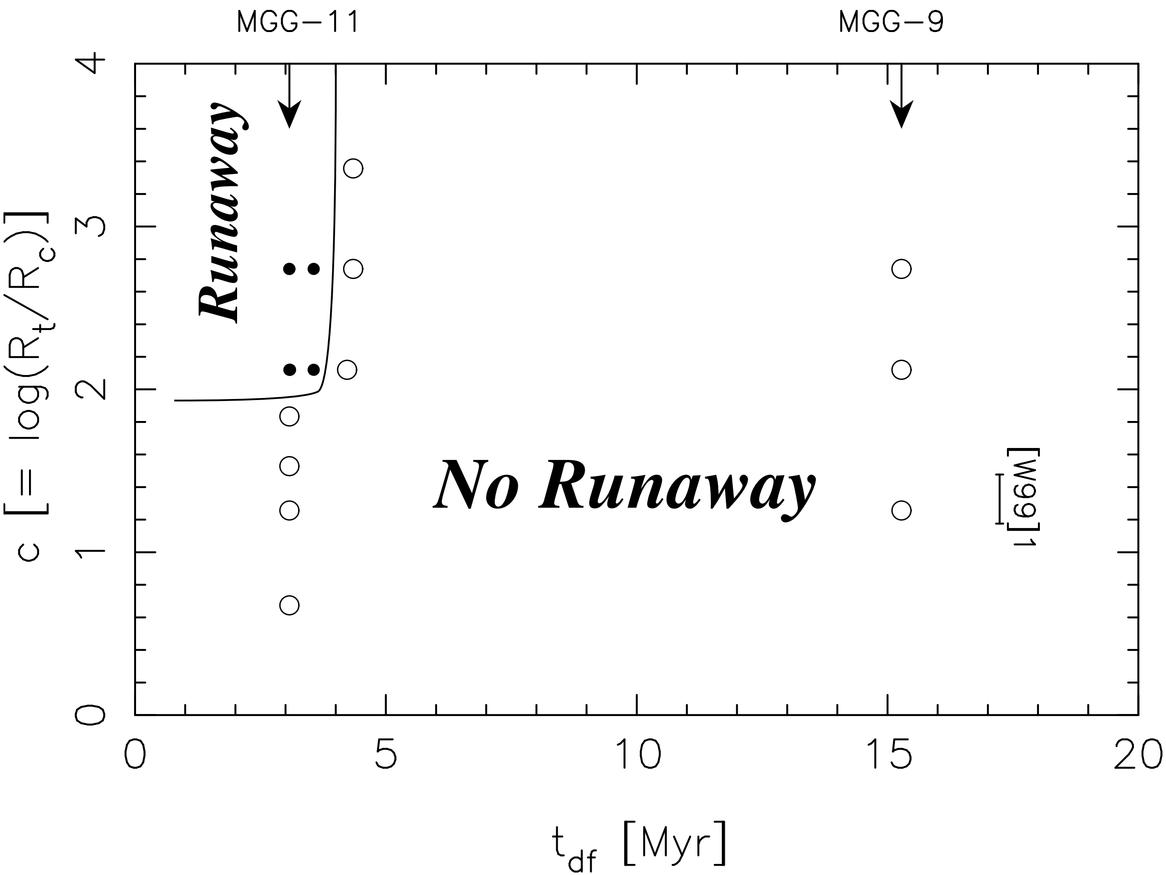
結果



$W_0 \geq 8$ なら暴走的合体 (MGG-11 では)

MGG-9 (緩和時間長い) では暴走的合体はおきない

結果のまとめ



緩和時間が短く、かつ初期に小さいコアを持つ必要がある

(微妙に理屈にあってない、、、ふってないパラメータのため？)

暴走的合体

基本的には、ダイナイカルフリクションの時間スケールが大質量星の寿命より短いなら暴走的合体はほぼ必然的に起きる。

暴走的合体を起こした星は (多分) そこそこ大きな BH、例えば 100–1000 $M_\odot$ になるであろう。

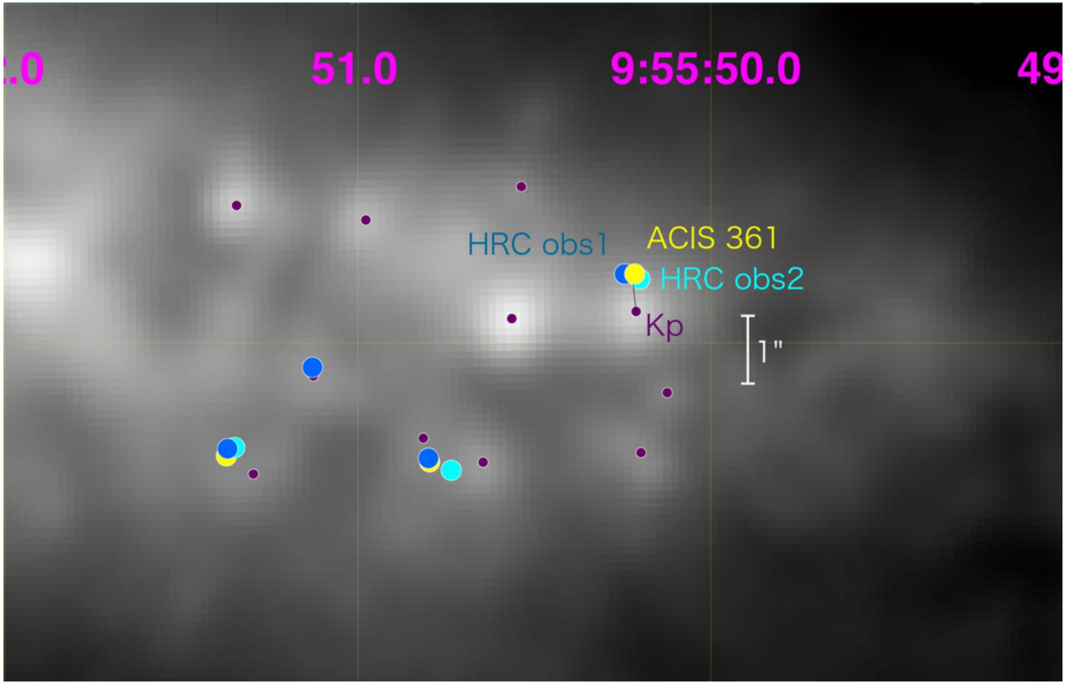
定量的な結果は主系列での質量放出やブラックホールになる質量の割合による。

IMBH 形成についてのまとめ

- 暴走的な合体による IMBH の形成は、理論/数値実験の結果を見る限りありそう。
- 暴走的な合体が起きる条件は星団の緩和時間が短く高密度なコアを持つこと

少なくとも、M82 の星団の中にある IMBH 候補を説明する極めてもっともらしくモデルではある。(他になんかあるわけでもない)

IMBH は本当に星団の中にあるのか？



鶴 (BH2003 talk)

2MASS のソースと Chandra のソースを重ねると、M82-X1 は MGG11 から 0".6 ずれてる。

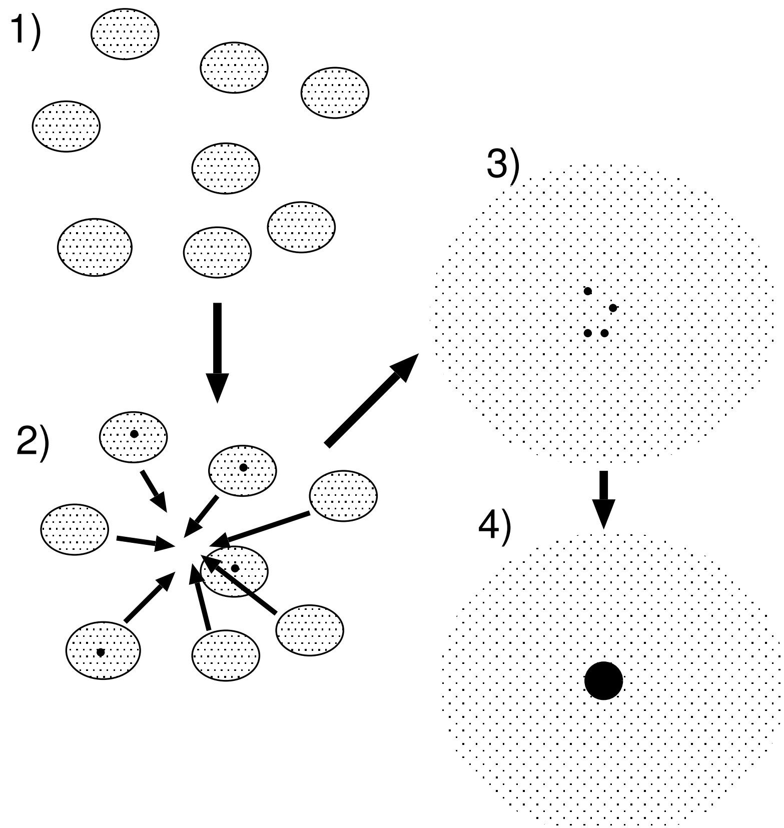
Radiation recoil で打ち出されたという可能性だってあるが、、、、

IMBH と SMBH の関係

1. 無関係？
2. 同じようにできた？
   - SMBH の成長時間長すぎる Growth timescale would be too large
3. SMBH を IMBH から作る?
   - タイムスケールの問題を解決できる (かも)

Merger シナリオ

Ebisuzaki et al. 2001 ApJ 562, 19L



1. スターバーストで大量に星団を作る
2. いくつかの星団では IMBH ができる。多くの星団はダイナミカルフリクションで中心に沈む。
3. 星団は潮汐破壊。 IMBH は中心に残る。
4. 複数の IMBH は星や他の IMBH との相互作用で連星になり、重力波で合体するところまでハードになる。

計算機の話

このような研究：

- できるだけ沢山の粒子を使って
- できるだけ長い時間
- できるだけ正確に

計算するのが大事。というわけで、

- 速く、正確に計算できるような方法を考える
- 新しい、速い計算機に合わせた方法を考える
- それでも足りなければ計算機を作る

速い計算機を使う

計算法の話は少ししたので、これははしょって後の 2 つ。

速い計算機とはどんなものか？

普通のパソコンと スーパーコンピューター

なにが違うか？

昔は随分違った。

昔の「速い計算機」

30 年前

- パソコンはなかった。
- 同じプログラムでも高い計算機のほうが速かった

20 年前

- パソコンはあったけど、同じプログラムで高い計算機の 1000 倍とかそれ以上時間が掛かった（値段もそれくらいではあった）
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」というものに変わってきて、特別な工夫をしてプログラムをかかないと性能がでなくなった。

今の「速い計算機」

10年前

- パソコンが非常に速くなってきた
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」がさらに沢山並んだ並列計算機になってきた。

今

- パソコンはもっと速くなった。
- ベクトルプロセッサを並列に使うより、パソコンを並列に使う方がずっと安くて速くなってきた。

例：

東大「スーパーコンピュータ」 7.6Gflops $\times$ 704台

値段は数10億円

普通のパソコン 1 台 12 Gflops 10 万円

値段あたりの性能を計算してみると、、、

プログラムにはいろいろ難しいことを考えないといけない。

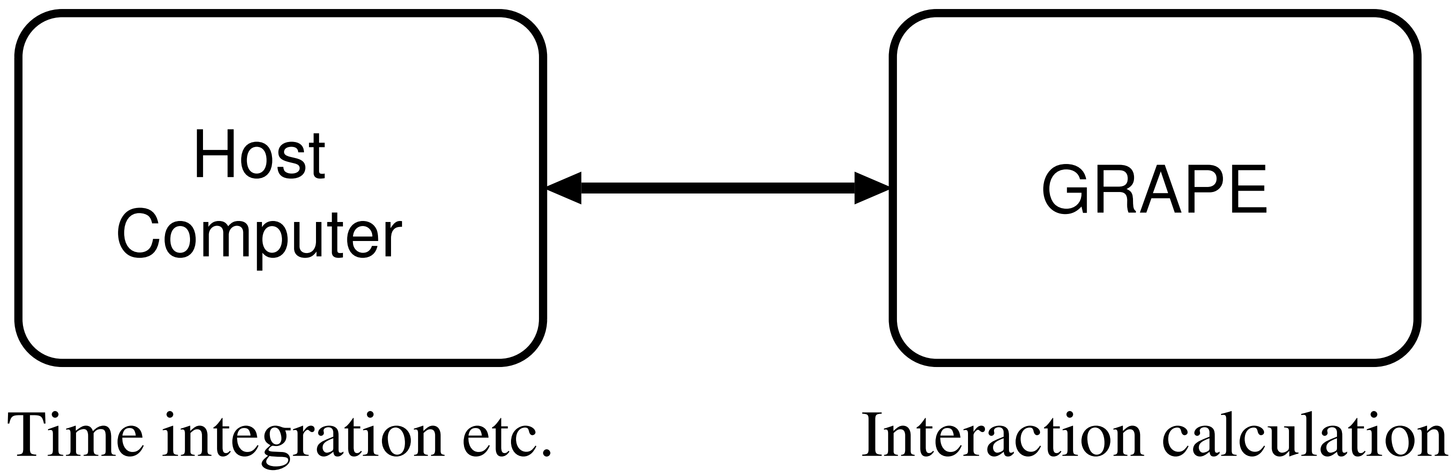
- 計算機どうしが通信すると時間が掛かる。
- もっと細かい話いろいろ。

計算機を作る？

- 計算機のなにもかもを全部作るのは大変
- 計算時間のほとんどは粒子間の重力の計算（計算法によってはちょっと違うけど､､､）

重力の計算だけ速くする計算機を考える
(GRAVITY PIPE, GRAPE)

GRAPE の基本的考え



専用ハード：相互作用の計算
汎用ホスト：他のすべての計算

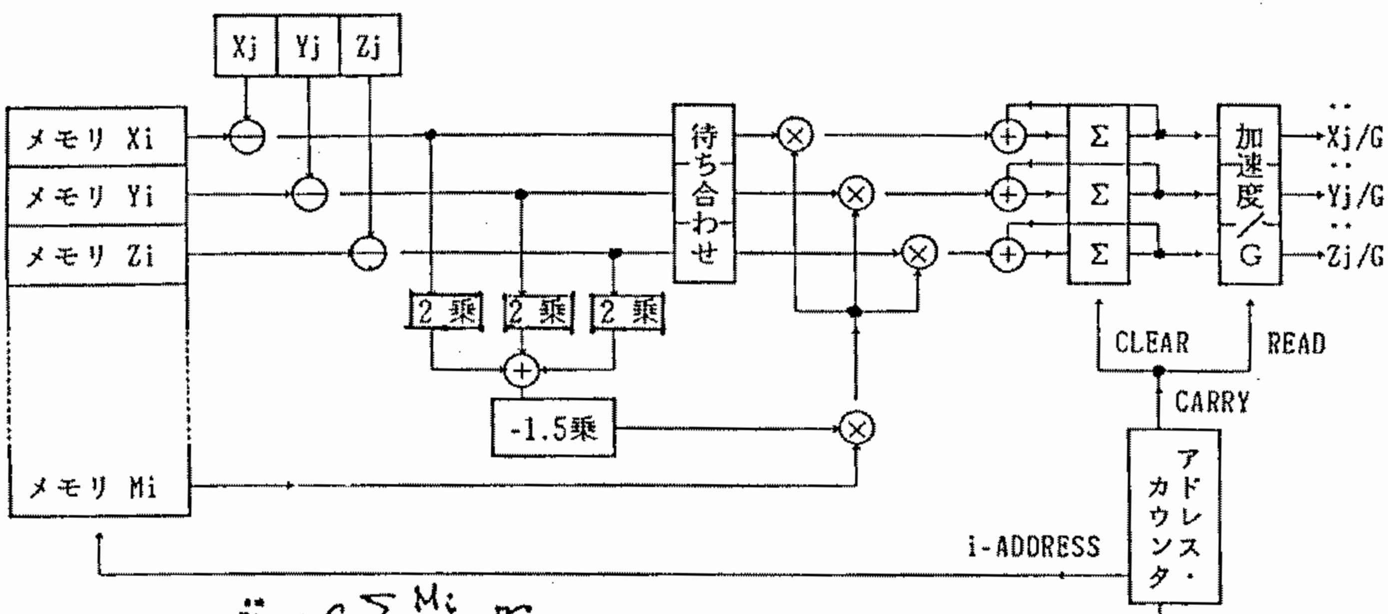
専用ハードウェア

- 相互作用計算のための専用パイプラインプロセッサ
  - 多数の演算器を集積可能
  - すべての演算器が常時並列動作

  → 非常に高い性能

- すべてハードウェア → ソフトウェア不要

GRAPE パイプライン



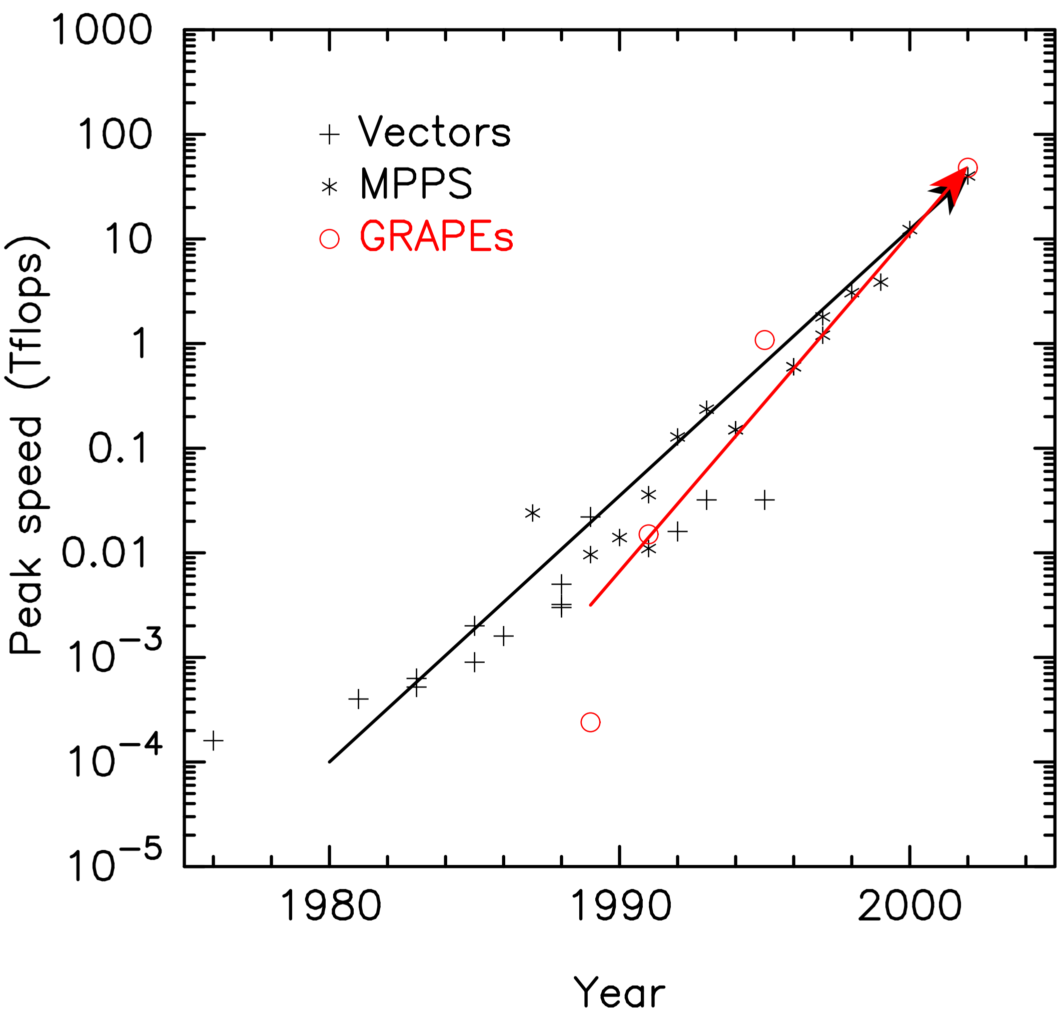
$$\ddot{\mathbf{r}}_j = G\sum_i \frac{M_i}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij} \qquad (\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

+，－，×，２乗は１operation，　-1.5乗は多項式近似でやるとして10operation 位に相当する．
総計24operation．
各operation の後にはレジスタがあって，全体がpipelineになっているものとする．
「待ち合わせ」は２乗してＭと掛け算する間の時間ズレを補正するためのFIFO(First-In First-Out memory)．
「Σ」は足し込み用のレジスタ．Ｎ回足した後結果を右のレジスタに転送する．

図２．Ｎ体問題のj-体に働く重力加速度を計算する回路の概念図．

（近田 1988）

計算速度の発展



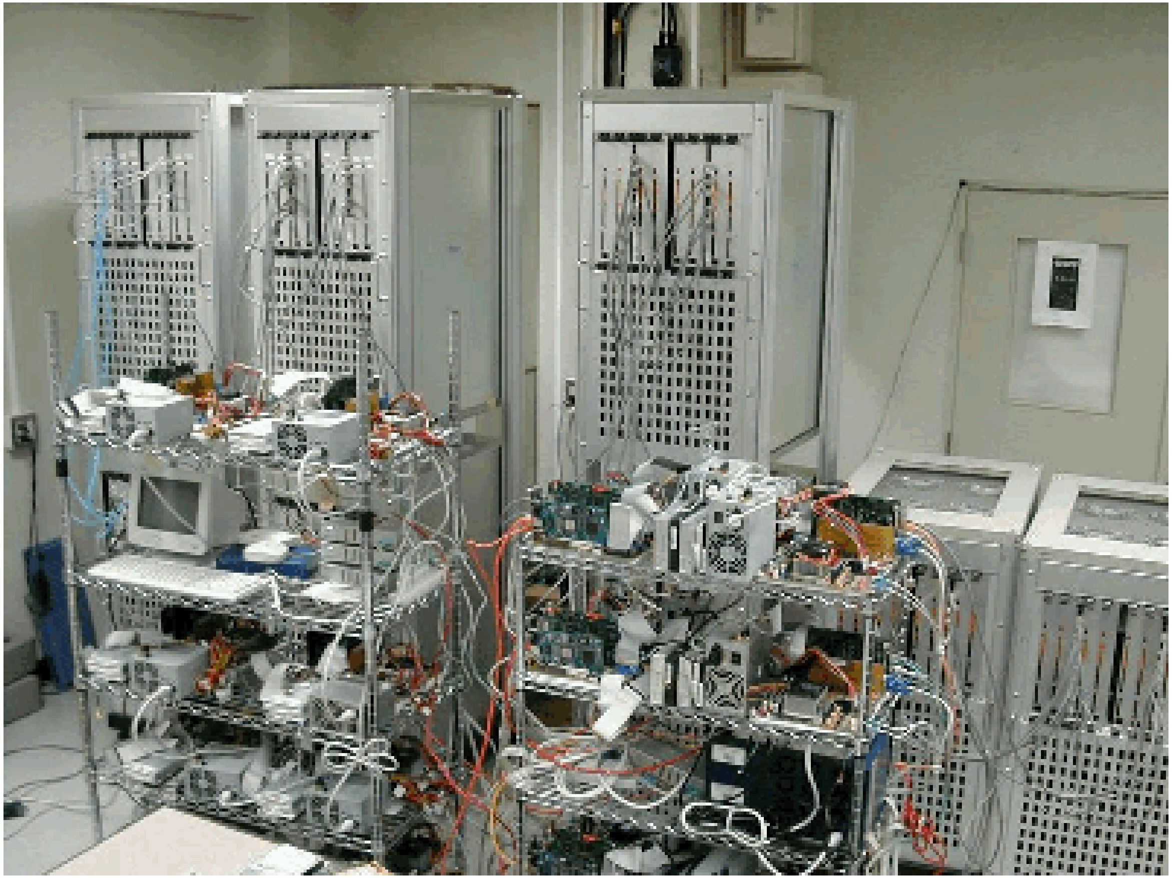
1000
100
10
1
0.1
0.01
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
Peak speed (Tflops)
1980
1990
2000
Year
Vectors
MPPS
GRAPEs

GRAPE-4

1995年完成、当時世界最高速

GRAPE-6

2002年完成、現在世界最高速



GRAPE の成果

この講義で紹介したいろいろな計算結果は、実はほとんどすべて GRAPE を使って計算したもの。

本当に新しい研究をするには、人より良い道具を持たないといけない

道具＝ 望遠鏡、人工衛星、計算機、、、(頭)

- 沢山お金を払って良い道具を買ってくる
  - お金を出しても売ってない、、、
- 頭を使って良い道具を作る

事務連絡：

レポート課題

この講義を聞いた感想、教官への希望等を A4 レポート用紙 1 枚程度（1000 字程度）にまとめて、以下のアドレスにメイルで提出すること。

`makino@th.nao.ac.jp`

MS-Word のファイルで送ってくれるとこちらで読むのが面倒なので、これは避けて欲しい。普通のメイルの文章、LaTeX、 HTML、 PDF はOK。

レポート提出期限は一応 2 週間後 (6/22) とする。

紙で次の回担当者に渡してくれても OK。